OMO

20 Jahre
Osnabrücker
Mathematik-Olympiade
(1996 – 2015)

Lothar Melching (Hrsg.)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 9

1 Historische Bemerkungen 11
1.1 Wie alles begann (L. Melching) 11
1.2 Wie es weiterging (L. Melching) 12
1.3 Protokoll 14

2 Die Sieger 17
2.1 OMO-Wettbewerb 1996 17
2.2 OMO-Wettbewerb 1997 17
2.3 OMO-Wettbewerb 1998 18
2.4 OMO-Wettbewerb 1999 18
2.5 OMO-Wettbewerb 2000 18
2.6 OMO-Wettbewerb 2001 19
2.7 OMO-Wettbewerb 2002 19
2.8 OMO-Wettbewerb 2003 19
2.9 OMO-Wettbewerb 2004 20
2.10 OMO-Wettbewerb 2005 20
2.11 OMO-Wettbewerb 2006 21
2.12 OMO-Wettbewerb 2007 21
2.13 OMO-Wettbewerb 2008 22
2.14 OMO-Wettbewerb 2009 23
2.15 OMO-Wettbewerb 2010 23
2.16 OMO-Wettbewerb 2011 24
2.17 OMO-Wettbewerb 2012 25
2.18 OMO-Wettbewerb 2013 25
2.19 OMO-Wettbewerb 2014 26

2.20 OMO-Wettbewerb 2015 27

3 Die Aufgaben 29
3.1 Ratsgymnasium Osnabrück 1996 29
3.1.1 Schriftlicher Teil 29
3.1.2 Mündlicher Teil 31
3.2 Ursulaschule Osnabrück 1997 32
3.2.1 Schriftlicher Teil 32
3.2.2 Mündlicher Teil 34
3.3 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 1998 35
3.3.1 Schriftlicher Teil 35
3.3.2 Mündlicher Teil 36
3.4 Gymnasium Melle 1999 38
3.4.1 Schriftlicher Teil 38
3.4.2 Mündlicher Teil 40
3.5 Gymnasium Oesede 2000 42
3.5.1 Schriftlicher Teil 42
3.5.2 Mündlicher Teil 43
3.6 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2001 45
3.6.1 Schriftlicher Teil 45
3.6.2 Mündlicher Teil 46
3.7 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2002 48
3.7.1 Schriftlicher Teil 48
3.7.2 Mündlicher Teil 50
3.8 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2003 52
3.8.1 Schriftlicher Teil 52
3.8.2 Mündlicher Teil 53
3.9 Gymnasium Bersenbrück 2004 55
3.9.1 Schriftlicher Teil 55
3.9.2 Mündlicher Teil 56
3.10 Gymnasium Bad Essen 2005 58
3.10.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 58
3.10.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 59
3.10.3 Klassenstufen 5 und 6 62

3.11 Greselius-Gymnasium Bramsche 2006 64
3.11.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 64
3.11.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 66
3.11.3 Klassenstufen 5 und 6 67
3.12 Gymnasium Bad Iburg 2007 70
3.12.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 70
3.12.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 75
3.12.3 Klassenstufen 5 und 6 76
3.13 Ratsgymnasium Osnabrück 2008 80
3.13.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 80
3.13.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 82
3.13.3 Klassenstufen 5 und 6 84
3.14 Ursulaschule Osnabrück 2009 87
3.14.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 87
3.14.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 90
3.14.3 Klassenstufen 5 und 6 90
3.15 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 2010 94
3.15.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 94
3.15.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 96
3.15.3 Klassenstufen 5 und 6 97
3.16 Gymnasium Melle 2011 101
3.16.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 101
3.16.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 102
3.16.3 Klassenstufen 5 und 6 104
3.17 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2012 105
3.17.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 105
3.17.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 106
3.17.3 Klassenstufen 5 und 6 107
3.18 Artland-Gymnasium Quakenbrück 2013 110
3.18.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 110
3.18.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 112
3.18.3 Klassenstufen 5 und 6 113
3.19 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2014 115
3.19.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 115

3.19.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 119
3.19.3 Klassenstufen 5 und 6 121
3.20 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2015 125
3.20.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 125
3.20.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 128
3.20.3 Klassenstufen 5 und 6 130

4 Die Lösungen 133
4.1 Ratsgymnasium Osnabrück 1996 134
4.1.1 Schriftlicher Teil 134
4.1.2 Mündlicher Teil 135
4.2 Ursulaschule Osnabrück 1997 136
4.2.1 Schriftlicher Teil 136
4.2.2 Mündlicher Teil 138
4.3 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 1998 139
4.3.1 Schriftlicher Teil 139
4.3.2 Mündlicher Teil 141
4.4 Gymnasium Melle 1999 143
4.4.1 Schriftlicher Teil 143
4.4.2 Mündlicher Teil 147
4.5 Gymnasium Oesede 2000 149
4.5.1 Schriftlicher Teil 149
4.5.2 Mündlicher Teil 151
4.6 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2001 153
4.6.1 Schriftlicher Teil 153
4.6.2 Mündlicher Teil 155
4.7 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2002 158
4.7.1 Schriftlicher Teil 158
4.7.2 Mündlicher Teil 159
4.8 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2003 160
4.8.1 Schriftlicher Teil 160
4.8.2 Mündlicher Teil 160
4.9 Gymnasium Bersenbrück 2004 162
4.9.1 Schriftlicher Teil 162

4.9.2 Mündlicher Teil 164
4.10 Gymnasium Bad Essen 2005 166
4.10.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 166
4.10.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 169
4.10.3 Klassenstufen 5 und 6 169
4.11 Greselius-Gymnasium Bramsche 2006 171
4.11.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 171
4.11.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 173
4.11.3 Klassenstufen 5 und 6 175
4.12 Gymnasium Bad Iburg 2007 176
4.12.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 176
4.12.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 177
4.12.3 Klassenstufen 5 und 6 178
4.13 Ratsgymnasium Osnabrück 2008 180
4.13.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 180
4.13.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 182
4.13.3 Klassenstufen 5 und 6 183
4.14 Ursulaschule Osnabrück 2009 186
4.14.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 186
4.14.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 188
4.14.3 Klassenstufen 5 und 6 190
4.15 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 2010 193
4.15.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 193
4.15.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 195
4.15.3 Klassenstufen 5 und 6 196
4.16 Gymnasium Melle 2011 199
4.16.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 199
4.16.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 200
4.16.3 Klassenstufen 5 und 6 201
4.17 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2012 203
4.17.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 203
4.17.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 205
4.17.3 Klassenstufen 5 und 6 207

4.18 Artland-Gymnasium Quakenbrück 2013 210
4.18.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 210
4.18.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 212
4.18.3 Klassenstufen 5 und 6 213
4.19 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2014 215
4.19.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 215
4.19.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 218
4.19.3 Klassenstufen 5 und 6 221
4.20 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2015 224
4.20.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil 224
4.20.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil 228
4.20.3 Klassenstufen 5 und 6 231

Index **233**

Vorwort

Diese Chronik der **Osnabrücker Mathematik-Olympiade (OMO)** soll eine zweifache Aufgabe erfüllen, zum einen soll sie die Preisträger festhalten, zum anderen soll sie das vielfältige Aufgabenmaterial zugänglich machen, das die verschiedenen Ausrichter im Laufe der Zeit zusammengetragen haben.

Ich danke allen Kolleginnen und Kollegen, die bei der Zusammenstellung der Fakten oder durch Überlassung ihres Aufgabenmaterials an dieser Dokumentation mitgewirkt haben. Ich danke besonders dem Kollegen Reinhardt Fulge, auf dessen Initiative hin die Osnabrücker Mathematik-Olympiade ins Leben gerufen wurde und der sie über die Jahre hin betreut hat.

Soweit nicht bereits von den Autoren vorgenommen, habe ich den Aufgaben ein Stichwort beigefügt, anhand dessen diese im Index gesucht werden können. Die komplette Chronik wurde mit dem Textsatzsystem LaTeXerstellt. Sie ist auch im Internet unter *http://lotharmelching.de/pdf/omochronik.pdf* nachzulesen.

Melle, im März 2016

Lothar Melching

1 Historische Bemerkungen

1.1 Wie alles begann (L. Melching)

Am Ratsgymnasium in Osnabrück bestand schon seit einer Reihe von Jahren ein schulinterner Mathematikwettbewerb unter dem Namen RAMA (RAtsgymnasium MAthematikwettbewerb). Dieser Wettbewerb richtete sich an die Mittelstufenschüler und legte diesen auf die jeweilige Klassenstufe abgestimmte Aufgaben zur individuellen schriftlichen Bearbeitung vor.

Nachdem dieser Wettbewerb sich im Laufe der Zeit erfolgreich etabliert hatte, regte der Kollege Reinhardt Fulge vom Ratsgymnasium einen erweiterten Wettbewerb für alle Gymnasien und Gesamtschulen aus der Stadt und dem Landkreis Osnabrück an. Er lud deshalb alle diese Schulen im Jahre 1995 zu einer Vorbesprechung ein, um seine Idee vorzutragen.

Die Idee wurde gerne aufgegriffen. Man einigte sich darauf, diesem Mathematikwettbewerb den Namen OMO (Osnabrücker Mathematik-Olympiade) zu geben und ihn in der folgenden Weise durchzuführen:

- Die Teilnehmer sind Schulmannschaften und nicht einzelne Schüler.
- Jede Mannschaft besteht aus vier Teilnehmern.
- Die Mannschaften sollen altersmäßig gemischt sein, der Idealfall ist je eine Schülerin/ein Schüler aus den Klassen 7 bis 10.
- Die Teilnehmer ein und derselben Mannschaft bearbeiten die vorgelegten Aufgaben stets gemeinsam.
- Zunächst werden ihnen vier Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung vorgelegt.

- Für die schriftliche Bearbeitung bekommen sie 90 Minuten Zeit.
- Die vier besten Mannschaften aus diesem schriftlichen Wettbewerbsteil kommen in die Endausscheidung.
- In der Endausscheidung werden den verbleibenden Mannschaften zwei neue Aufgaben vorgelegt.
- Die Lösungen dazu sind gemeinsam zu erarbeiten uns anschließend mündlich vorzutragen.
- Die Bewertung dieses Wettbewerbsteiles berücksichtigt auch die Art des Vortrags und das gemeinsame Auftreten der Mannschaft.
- Der Wettbewerb soll reihum von den beteiligten Schulen ausgerichtet werden.

1.2 Wie es weiterging (L. Melching)

Bei den ersten Mathematik-Olympiaden nahmen immerhin schon ein Dutzend Mannschaften teil. Im Laufe der Zeit vergrößerte sich die Teilnehmerzahl, weil einerseits zunächst außenstehende Schulen hinzu kamen und andererseits Schulen auch mit mehreren Mannschaften antraten.

In den ersten Jahren trafen sich die betreuenden Lehrer nach jedem Wettbewerb zu einem Erfahrungsaustausch. Nach den Erfahrungen wurden auch die Wettbewerbsbedingungen fortentwickelt. Ein Ergebnis dieser Zusammenkünfte ist das im Abschnitt 1.3 wiedergegebene Protokoll.

Für die Bewertung der schriftlichen Aufgaben waren von Anfang an je 10 Punkte vorgesehen. Damit die mündliche Runde dasselbe Gewicht erhielt, vergab man hier für jede Aufgabe zunächst bis zu 20 Punkte. Im Laufe der Zeit reduzierte man deren Gewicht auf 10 Punkte je Aufgabe. Damit Schülerinnen und Schüler der 7. Klassen sich produktiv beteiligen können, sollten immer auch Aufgaben dabei sein, die auf Vorkenntnisse aus den höheren Klassen verzichten

Im Jahre 2004 erhielten die Gymnasien nach Auflösung der Orientierungsstufe in Niedersachsen die 5. und 6. Klassen zurück. Diese sollten

fortan in die Osnabrücker Mathematik-Olympiade einbezogen werden. Da es untunlich erschien, die Mannschaften zu vergrößern, und man auch den großen Altersunterschied zwischen Zehntklässlern und Fünftklässlern als problematisch ansah, beschloss man, für die 5. und 6. Klassen einen eigenen Wettbewerb im Rahmen der OMO auszurichten. Das Gymnasium in Bad Essen hat sich dieser Aufgabe als erstes unterzogen und sie mit Bravour gemeistert. Im Rahmen des Wettkampfs der 5. und 6. Klassen ist es üblich geworden, dass die erste Runde als schriftliche Runde in derselben Form wie bei den 7. bis 10. Klassen erfolgt, die zweite Runde aber als sportlicher Mannschaftwettbewerb durchgeführt wird.

Von Anfang an sollte den Wettbewerbsteilnehmern ein echter Anreiz geschaffen werden. Stets erhielten alle Teilnehmer eine schöne Urkunde, die vier siegreichen Mannschaften darüber hinaus Preise in Form von Büchergutscheinen und die erstplatzierte Mannschaft einen Wanderpokal. Die Büchergutscheine hatten von Beginn an einen erheblichen Wert.

Anfangs erhielt jedes Mitglied der viertbesten Mannschaft 25,- DM. Das steigerte sich für die davor liegenden über 50,- DM, 75,- DM bis auf 100,- DM. Diese finanzielle Leistung war nur möglich, weil uns der Buchhandel in diesem Unternehmen sehr gut unterstützt hat, ebenso auch die Fördervereine der ausrichtenden Schulen. Besonders hervorgetan durch ihr finanzielles Engagement hat sich über die Jahre hinweg die Buchhandlung Jonscher aus Osnabrück. Allen Spendern und Förderern sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

1.3 Protokoll

Osnabrücker Mathematik-Olympiade (OMO)
(in der Fassung vom 16.12.2002)

Träger der Olympiade

Träger der Olympiade ist der „Arbeitskreis Mathematik der Osnabrücker Region“ (AMOR). Dieser versteht sich als lockerer Zusammenschluss einer Interessengruppe von Mathematikerinnen und Mathematikern aus den Fachgruppen der beteiligten Schulen.

Durchführungsmodus

I Termine und Ausrichter

Die Olympiade findet jedes Jahr einmal im zweiten Halbjahr des Schuljahres statt. Eingeladen werden die Gymnasien und Gesamtschulen der Osnabrücker Region.

Der jeweilige Ausrichter organisiert die Veranstaltungsplanung. Er ist zuständig für die Erstellung und Korrektur der Aufgaben und für die Durchführung der eigentlichen Veranstaltung.

Nach der Ausrichtung der ersten Olympiade 1996 durch das Ratsgymnasium wurde in den Folgejahren die Olympiade von folgenden Schulen ausgerichtet: Ursulaschule, Graf-Stauffenberg-Gymnasium, Gymnasium Melle, Gymnasium Oesede, Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium, Gymnasium „In der Wüste“.

Die Anzahl der teilnehmenden Gymnasien aus Osnabrück und Umgebung beträgt seit der erstmaligen Durchführung etwa 8 bis 10. Da mehrere Gymnasien wiederholt auch mit zwei oder drei Mannschaften teilgenommen haben, ergibt sich eine gleichbleibende Beteiligung von etwa 12 bis 15 Teams.

II Vorbereitung

Im ersten Halbjahr des Schuljahres erfolgt eine offizielle Einladung der beteiligten Schulen durch den Veranstalter. Nach den Herbstferien werden die Aufgabenvorschläge aus dem Mathematikwettbewerb des Ratsgymnasiums (RAMA) auf der Homepage des Ratsgymnasiums ins Internet gestellt und können von den einzelnen Schulen nach eigenem Ermessen in einer Art Vorrunde verwendet werden.

Die zugehörigen Lösungen werden erst nach Abschluss des Mathematikwettbewerbs des Ratsgymnasiums zu Beginn des zweiten Halbjahres ins Internet gesetzt.

Die Schulen stellen Teams von vier Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I zusammen. Eine Schule kann mit bis zu drei Teams an der Olympiade teilnehmen.

III Durchführung

Am Veranstaltungstag erhält jedes Team in der *ersten Runde* vier Aufgaben, die es unter Klausurbedingungen innerhalb von 90 Minuten als Gesamtteam schriftlich bearbeitet. Mindestens zwei der Aufgaben sollen mit den unterrichtlichen Voraussetzungen der 7. Klasse lösbar sein.

Eine Korrekturgruppe des Ausrichters bewertet die Lösungen der einzelnen Teams und ermittelt die vier oder fünf besten Teams, die sich für die folgende Runde qualifiziert haben.

Die *zweite Runde* findet vor Publikum statt. Die Teams erhalten nacheinander jeweils zwei Aufgaben, die sie 15 Minuten lang bearbeiten und deren Lösung sie anschließend 10 Minuten lang vortragen dürfen. Gefordert sind hier vor allem Lösungsstrukturen und deren mündliche Wiedergabe sowie Teamarbeit. Der Ablauf erfolgt in der Weise, dass während des Vortrags eines Teams das jeweils nächste Team die Aufgaben bearbeitet. Die Bewertung jedes Teams durch die Jury erfolgt unmittelbar nach dem Vortrag.

Die Siegerteams werden anhand der Ergebnisse der ersten und zweiten Runde ermittelt. In die Gesamtwertung geht jede der vier schriftli-

chen und der zwei mündlichen Aufgaben mit gleichem Gewicht ein. Die Siegerehrung findet anschließend statt.

IV Prämierung

Das Siegerteam erhält einen Wanderpokal. Die besten Teams erhalten Buchschecks, die zu gleichen Teilen unter den Schülerinnen und Schülern eines Teams aufzuteilen sind. Alle Teilnehmer erhalten eine Urkunde.

Die großzügige Preisgestaltung ist möglich, da es dem Arbeitskreis bisher in jedem Jahr gelungen ist, Buchhändler aus der Region Osnabrück als Sponsoren zu gewinnen.

2 Die Sieger

2.1 OMO-Wettbewerb 1996

Ausrichter: Ratsgymnasium Osnabrück

1. Gymnasium Oesede, Team I
   (Oliver Bießmann, Timo Meyer, Stella Poettering, Philipp Niermann)
2. Gymnasium Carolinum Osnabrück
3. Ratsgymnasium Osnabrück, Team I
4. Ursulaschule Osnabrück

2.2 OMO-Wettbewerb 1997

Ausrichter: Ursulaschule Osnabrück

1. Ursulaschule Osnabrück
   (Birthe Fulge, Sandra Léfèvre, Dominik Salewsky, Mark Ullmann)
2. Ratsgymnasium Osnabrück, Team I
3. Gymnasium Oesede, Team I
4. Gymnasium Carolinum Osnabrück

2.3 OMO-Wettbewerb 1998

Ausrichter: Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück
   (Wenjie Chen, Daniela Dissel, Jan-David Henkelmann, Sascha Philipps)
2. Ratsgymnasium Osnabrück, Team II
3. Gymnasium Oesede
4. Ursulaschule Osnabrück, Team I

2.4 OMO-Wettbewerb 1999

Ausrichter: Gymnasium Melle

1. Gymnasium Oesede
   (Waldemar Mai, Philip Peter, Nicolas Poettering, Frank Richter)
2. Ratsgymnasium Osnabrück, Team I
3. Gymnasium Carolinum Osnabrück
4. Ratsgymnasium Osnabrück, Team II

2.5 OMO-Wettbewerb 2000

Ausrichter: Gymnasium Oesede

1. Ursulaschule Osnabrück, Team I
   (Verena Blase, Marie Fulge, Daniel Ibershoff, Gereon Kaiping)
2. Gymnasium Oesede
3. Gymnasium Carolinum Osnabrück
4. Gymnasium Melle

2.6 OMO-Wettbewerb 2001

Ausrichter: Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück

1. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team I
   (Daniel Neumann, Henrike Niederholtmeyer, Jan Vomberger, Anders Winström)
2. Ratsgymnasium Osnabrück, Team III
3. Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück, Team II
4. Ratsgymnasium Osnabrück I

2.7 OMO-Wettbewerb 2002

Ausrichter: Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück
   (Mathias Bollmann, Laura Frick, Marco Oesting, Bernhard Sommer)
2. Ratsgymnasium Osnabrück, Team I
3. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück, Team I
4. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team I

2.8 OMO-Wettbewerb 2003

Ausrichter: Gymnasium Carolinum Osnabrück

1. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team II
   (Uta Bergmann, Nils Mehnert, Paul Naumann, Jan Willem Vogel)
2. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team I
3. Gymnasium Bersenbrück
4. Gymnasium Bad Essen, Team I

2.9 OMO-Wettbewerb 2004

Ausrichter: Gymnasium Bersenbrück

1. Greselius-Gymnasium Bramsche
   (Jan Bielak, Kathrin Kuhlmann, Aljona Seitz, Sebastian Thiem)
2. Gymnasium Bad Essen
3. Gymnasium Oesede
4. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück

2.10 OMO-Wettbewerb 2005

Ausrichter: Gymnasium Bad Essen

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium Bad Essen, Team I
   (Tabea Blessing, Iris Dobschall, Katharina Fritzler, Thorben Weymann)
2. Gymnasium Oesede
3. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team I
4. Ursulaschule Osnabrück, Team I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück
   (Hanna Brill, Timo Gerigk, Monika Knapp, Valentin Schellhas)
2. Gymnasium Melle
3. Greselius-Gymnasium Bramsche

2.11 OMO-Wettbewerb 2006

Ausrichter: Greselius-Gymnasium Bramsche

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Ursulaschule Osnabrück, Team A I
   (Ursula Kaiping, Benjamin Kisliuk, Jan-Stefan Peters, Miriam Schlöter)
2. Gymnasium Oesede, Team A I
3. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team A I
4. Gymnasium Bad Essen, Team A II

Klassenstufen 5 und 6:

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück
   (Dorothee Albers, Björn Gastmann, Kenneth Hoss, Jan Klenner)
2. Gymnasium Bad Essen
3. Ursulaschule Osnabrück
4. Gymnasium Bad Iburg, Team B I

2.12 OMO-Wettbewerb 2007

Ausrichter: Gymnasium Bad Iburg

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A I
   (Carina Beermann, Ronja Boberg, Dominik Junkermann, Johannes Linz)
2. Ursulaschule Osnabrück, Team A II
3. Gymnasium Bad Iburg
4. Ursulaschule Osnabrück, Team A I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team B I
   (Malina Bergmann, Annika Boje, Bastian Torlage, Lisa-Marie Vortmann)
2. Gymnasium Bad Essen
3. Ursulaschule Osnabrück
4. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück

2.13 OMO-Wettbewerb 2008

Ausrichter: Ratsgymnasium Osnabrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A II
   (Kris Herberger, Jonas Kannengießer, Susanne Koch, Sarah Schöttler)
2. Gymnasium Carolinum Osnabrück, Team A I
3. Ursulaschule Osnabrück, Team A II
4. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück, Team A I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Gymnasium Bersenbrück, Team B I
   (Marcel Macke, Manuel Rammler, Nils Steinkamp, Jacqueline Weiss)
2. Gymnasium Bad Essen, Team B II
3. Gymnasium Oesede, Team B I
4. Gymnasium Bad Iburg, Team B I

2.14 OMO-Wettbewerb 2009

Ausrichter: Ursulaschule Osnabrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium Bad Essen, Team A II
   (Frederick Hissenkämper, Kim Kipsieker, Theresa Reiker, Kirsten Sehlmeyer)
2. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A II
3. Gymnasium Bad Essen, Team A I
4. Gymnasium Bad Iburg, Team A I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Gymnasium Melle, Team B II
   (Finn Gelhot, Christoph Riemann, Julian Rolfes, Jan Schneider)
2. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück
3. Ursulaschule Osnabrück, Team B I
4. Gymnasium Melle, Team B I

2.15 OMO-Wettbewerb 2010

Ausrichter: Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Ursulaschule Osnabrück, Team A I
   (Marcel Gausmann, Christian Klusmann, Judith Notbohm, Kristin Rethmann)
2. Gymnasium Bad Iburg, Team A I
3. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team A I
4. Graf-Srauffenberg-Gymnasium Osnabrück, Team A I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Ratsgymnasium Osnabrück, Team B II
   (Moritz Rocho, Joshua Sangmeister, Noah Teleger, Matthis Wieneke)
2. Gymnasium Melle, Team B II
3. Gymnasium Bersenbrück, Team B I
   und Ursulaschule Osnabrück, Team B I

2.16 OMO-Wettbewerb 2011

Ausrichter: Gymnasium Melle

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium Carolinum Osnabrück, Team A I
   (Sven Klecker, Jennifer Meyer, Jan Reitzner, Pascal Schnieder)
2. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A I
3. Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück, Team A I
4. Gymnasium Bad Iburg, Team A I
5. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team A I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Gymnasium Melle, Team B II
   (Nils Auf der Masch, Tobias Kansteiner, Jens Meyer, Leon Stümpeldey)
2. Gymnasium Carolinum Osnabrück, Team B I
3. Ernst-Moritz-Arndt Gymnasium Osnabrück, Team II
4. Artland-Gymnasium Quakenbrück, Team B I
   und Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team B I

2.17 OMO-Wettbewerb 2012

Ausrichter: Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Ursulaschule Osnabrück
   (Jona Böttger, Jana Böhm, Kristin Rethmann, Roman Feller)
2. Greselius-Gymnasium Bramsche
3. Gymnasium Melle
4. Gymnasium Bad Essen, Team A II
5. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A II

Klassenstufen 5 und 6:

1. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team B I (Mathias Burkhard, Felix Kolfen, Aaron Langkamp, Simon Schlicht)
2. Ursulaschule Osnabrück
3. Gymnasium Bersenbrück
4. Gymnasium Bad Essen Team B I

2.18 OMO-Wettbewerb 2013

Ausrichter: Artland-Gymnasium Quakenbrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium Melle, Team A I
   (Niklas Müller, Christoph Riemann, Julian Rolfes, Jan SzySzko vel Chorazy)
2. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück, Team A II
3. Ursulaschule Osnabrück, Team A I

4. Artland Gymnasium Quakenbrück, Team A I
   Greselius-Gymnasium Bramsche, Team A I
   Ratsgymnasium Osnabrück, Team A II

Klassenstufen 5 und 6:

1. Ursulaschule Osnabrück, Team B I
   (David Böttger, Anna-Maria Hegmann, Alexdandra Merla, Meike Thörner))
2. Greselius-Gymnasium Bramsche, Team B I
3. Gymnasium Carolinum Osnabrück, Team B I
4. Gymnasium Melle, Team B II

2.19 OMO-Wettbewerb 2014

Ausrichter: Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Gymnasium Bad Essen, Team A II
   (Dennis Fritzler, Birte Sehlmeyer, Annalena Tiemann, Aurelia Tiemann)
2. Gymnasium Bramsche, Team A II
3. Ursulaschule Osnabrück, Team A I
4. Ratsgymnasium Osnabrück, Team A I

Klassenstufen 5 und 6:

1. Artland-Gymnasium Quakenbrück
   (Lili Beckmann, Dennis Elschen, Julia Lamping, Finn Schmudde)
2. Gymnasium Bad Essen
3. Ursulaschule Osnabrück
4. Gymnasium Melle, Team B I

2.20 OMO-Wettbewerb 2015

Ausrichter: Gymnasium Carolinum Osnabrück

Klassenstufen 7 bis 10:

1. Ernst-Moritz-Arndt Gymnasium Osnabrück Team A
   (Justin Berling, Tom Gaese, Marvin Lenjer, Benno Steinkamp)
2. Gymnasium Bad Essen Team A II
3. Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück Team A I
4. Gymnasium Carolinum Osnabrück Team A II

Klassenstufen 5 und 6:

1. Ursulaschule Osnabrück Team B
   (Lennard Hofmann, Joachim Möllenbrock, Clara Stolte, Lukas Wölfer)
2. Gymnasium Bad Essen Team B
3. Greselius-Gymnasium Bramsche Team B

3 Die Aufgaben

3.1 Ratsgymnasium Osnabrück 1996

3.1.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Der Page des Königs)

Der Page des Königs war – wie Pagen eben so sind – frech und vorlaut gewesen. Deshalb sollte er bestraft werden. Doch der König, der den Knaben gern hatte, wollte ihm eine Chance geben. Er wusste: Mit Hilfe seiner Intelligenz könnte der Kleine sich aus der Affäre ziehen.

„Sieh her, du Bengel“, sagte der Monarch und deutete dabei auf den Tisch, auf dem zwölf verschlossene Kästchen standen (sie bildeten einen Kreis), „einer dieser Kästen ist leer, der diesem Kasten benachbarte Kasten enthält eine Kugel, der Kasten daneben zwei Kugeln, der nächste drei Kugeln und so fort bis zum zwölften Kasten, in dem sich elf Kugeln befinden. Und neben diesem steht wiederum der schon erwähnte leere Kasten. Du sollst nun auf eines dieser Kästchen zeigen und wirst zur Strafe dann so viele Stockschläge erhalten, wie Kugeln in dem Kasten sind.“

Der Knabe, der sich gerne die Prügel ersparen wollte, entdeckte, dass die Kästen nummeriert waren. Von dem Kasten mit der Nummer null angefangen waren sie - wiederum im Uhrzeigersinn der Reihe nach mit folgenden Zahlen gekennzeichnet: 0, 2, 7, 10, 1, 3, 6, 11, 8, 4, 5, 9.

„Darf ich eine Frage stellen?“ begehrte der Knabe zu wissen. „Gewiss“, antwortete der König, „aber nur eine einzige.“ Darauf der Junge: „Bei wie vielen dieser Kästen stimmt die Zahl der darin enthaltenen Kugeln mit der Nummer des betreffenden Kastens überein?“ – Der König:

„Würde ich dir diese Frage beantworten, dann wüsstest du mit absoluter Sicherheit, welcher der leere Kasten ist.“

Nach einigem Überlegen deutete der Page auf den Kasten, in dem sich keine Kugel befand. Welcher war's?

Aufgabe 2 (Endziffern)

a. Wie heißen die letzten beiden Ziffern von 7^5?
b. Wie heißen die letzten beiden Ziffern von 7^{1996}?

Aufgabe 3 (Punkt im Winkel)

(Siehe Abb. 3.1) An einer beliebigen Stelle „innerhalb“ eines spitzen Winkels ist ein Punkt P fest vorgegeben. Wie sind die Punkte A, B auf den Schenkeln zu wählen, damit das Dreieck $\triangle ABP$ minimalen Umfang besitzt?

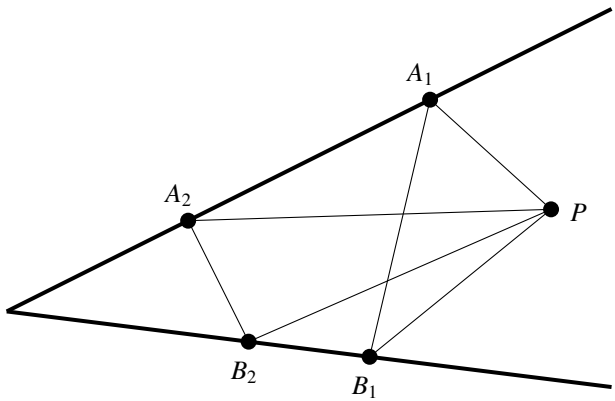


Abbildung 3.1: Ratsgymnasium 1996, Schriftl. Teil, Aufg. 3

Aufgabe 4 (Fünf Kreise)

Jeweils vier von fünf gegebenen Kreisen gehen durch einen gemeinsamen Punkt. Zeige, dass es einen Punkt gibt, durch den alle fünf Kreise gehen. (Hinweis: Wie viele Punkte können zwei Kreise höchstens gemeinsam haben?)

3.1.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Verworrene Familienverhältnisse)

Urgroßmutter, Großmutter, Mutter und Kind sitzen an einem runden Tisch. Addiert man das Alter von jeweils dreien, so erhält man 154, 221, 186 bzw. 132.

Kann die Geschichte stimmen?

Aufgabe 2 (Fußballturnier)

An einem Fußballturnier nehmen 20 Mannschaften teil, die in einer Vorrunde in zwei Gruppen mit jeweils 10 Mannschaften spielen. Nach der Vorrunde, in der jede Mannschaft gegen jede andere einmal gespielt hat, sollen die besten Mannschaften aus jeder Gruppe noch einmal im Gruppenspielmodus gegeneinander spielen (d.h. in jeder dieser neuen Gruppen spielt wieder jeder gegen jeden einmal).

Aus organisatorischen Gründen können an dem Tag nur 100 Spiele durchgeführt werden. Wie viele Mannschaften aus jeder Vorrundengruppe dürfen in der zweiten Runde maximal teilnehmen?

3.2 Ursulaschule Osnabrück 1997

3.2.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Logical OMO)

Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematik-Olympiade teil.

1. Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49 und 50.
2. Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.
3. Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit einzeln Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.
4. Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.
5. Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, ist das Eineinhalbfache seines Alters.
6. Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.
7. Die drei Schüler sind zusammen so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.
8. Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Sämtliche Altersangaben erfolgen in vollen Jahren.)

Aufgabe 2 (Pythagorasfigur)

Abbildung 3.2 zeigt den Inhalt des Satzes von Pythagoras. Dieser gilt nur für rechtwinklige Dreiecke. Er lautet

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

Dieser Satz braucht nicht bewiesen zu werden, er darf zur Lösung der Aufgabe angewandt werden.

Verbinde die äußeren sechs Punkte der Quadrate. Drücke den Inhalt des so entstandenen Sechsecks allein durch die Längen der beiden Katheten a und b aus.

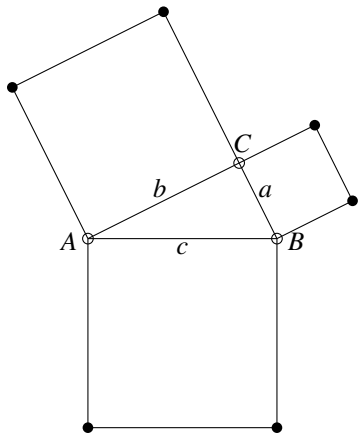


Abbildung 3.2: Ursulaschule 1997, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Aufgabe 3 (Konzentrische Kreise)

Gegeben seien zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt.

Beweise, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen eines beliebigen Punktes P auf dem äußeren Kreis von den Endpunkten A und B eines Durchmessers $\overline{AB}$ des inneren Kreises für jede Lage des Punktes P denselben Wert ergibt, und berechne diesen Wert.

Aufgabe 4 (Sechsstellige Zahl)

Eine sechstellige Zahl habe die Ziffernfolge *abcabc*, z. B. 847847. Weise nach, dass keine derartige Zahl Quadratzahl sein kann.

3.2.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Drei Gegenstände)

Bei einem Spiel versteckt jede der drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihrer Handtasche genau einen der drei Gegenstände Ball, Bleistift, Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß eine wahr ist, die beiden anderen aber falsch sind:

- Anna hat den Ball.
- Brigitte hat den Ball nicht.
- Claudia hat die Schere nicht.

Wie kann Dieter das Problem lösen?

Aufgabe 2 (Endziffer Null)

Für natürliche Zahlen $n > 0$ versteht man unter der Zahl $n!$ (gelesen „n Fakultät“) das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

a. Mit wievielen Nullen endet die Zahl 50! ? Begründe die Antwort!
b. Wieviele Endziffern Null besitzt die Zahl 1997! ? Auch hier wird eine Begründung erwartet.

3.3 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 1998

3.3.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Eheprobleme)

Der zerstreute Professor war auf einer Party. Natürlich wollte seine Frau wissen, wer dort gewesen war. „Dieselben wie immer," antwortete er, „und ein paar neue Gesichter: Ted, Pete und Karl. Und ihre Frauen: Barbara, Sue und Nicola. Ich entsinne mich nicht, wer mit wem verheiratet ist. Jedenfalls hat jedes Paar ein Kind: sie heißen Ruth, Vera und Dieter. Sie haben mir alles über sie erzählt. Barbara sagte, ihr Kind hätte das Schneewittchen im Märchenstück gespielt. Und Pete sagte, sein Kind würde das Rotkäppchen spielen. Ich erinnere mich, dass Ted darauf bestand, seine Tochter heiße nicht Vera. Und Karl ist nicht mit Sue verheiratet. Ich glaube, damit kriegen wir heraus, wer mit wem verheiratet ist."

Versuche, ob du das auch schaffst – und ob du herausfindest, welche Kinder zu wem gehören.

Aufgabe 2 (Fünfersumme)

Zeige, dass es unter fünf beliebig gewählten natürlichen Zahlen stets drei gibt, deren Summe durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 3 (Seitenhalbierende)

Man zeige, daß in jedem Dreieck ΔABC die Summe der Längen der drei Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c stets größer ist als drei Viertel des Dreieckumfangs, aber auch stets kleiner als der Dreiecksumfang selbst.

Aufgabe 4 (Punktmenge)

Der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$ werde mit S bezeichnet. Bestimme die Lage aller Punkte P, für die die Streckenlängen

$|AP|$, $|SP|$, $|BP|$ usw. alle vier folgenden Ungleichungen gleichzeitig erfüllen:

$$|AP| \geq |SP|\,, |BP| \geq |SP|\,, |CP| \geq |SP| \text{ und } |DP| \geq |SP|\,.$$

Welche Figur entsteht?

3.3.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Münzwurf)

Bei einem Wohltätigkeitsfest wird folgendes Glücksspiel angeboten:

Der Spieler wirft ein 50-Pfennig-Stück (Durchmesser 2cm) auf ein großes schachbrettartig gemustertes Tuch, bei dem die Kantenlänge eines Karos 3cm beträgt. Wenn das 50-Pfennig-Stück vollständig innerhalb eines Karos liegen bleibt, so erhält der Spieler einen Gewinn von 1 DM. In allen anderen Fällen geht der Einsatz von 50 Pfennigen verloren.

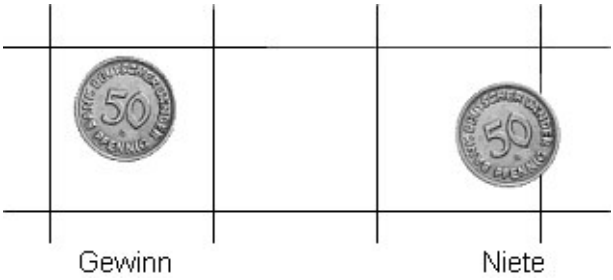


Abbildung 3.3:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 1998, Mündl. Teil, Aufg. 1

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn, wenn man davon ausgeht, dass kein Geldstück neben das Tuch fällt, und die Lage des Geldstückes vom Zufall und nicht vom Können des Werfers bestimmt wird

b. Wieviel wird nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung am Ende der Veranstaltung für den wohltätigen Zweck in der Kasse zu erwarten sein, wenn insgesamt 5040 mal gespielt wurde?

Aufgabe 2 (Die eingeschobene Null)

In der Gleichung $108 = 6 \cdot 18$ treten die Ziffern 1 und 8 in dem einen Faktor nebeneinander auf, im Produkt sind sie durch eine 0 getrennt. Nun zeigt sich eine verblüffende Aussage für Zahlen, zwischen deren Ziffern man je eine Null einfügt:

Aussage: Wenn die Zahl $zyx\ldots cba$ durch 6 teilbar ist, so ist auch $z0y0x0\ldots 0c0b0a$ durch 6 teilbar. (Beispiele dafür sind die Pärchen 18 und 108, 216 und 20106, 24184236 und 204010804020306.)

a. Beweise diese Aussage!
b. Gibt es auch andere Faktoren als die Zahl 6, für die die Aussage ebenfalls gilt?

3.4 Gymnasium Melle 1999

3.4.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Würfel)[1]

Martin bietet dir ein Spiel mit vier Spezialwürfeln an, deren Netze unten abgebildet sind (s. Abb. 3.4). Es soll nach den folgenden Spielregeln gespielt werden:

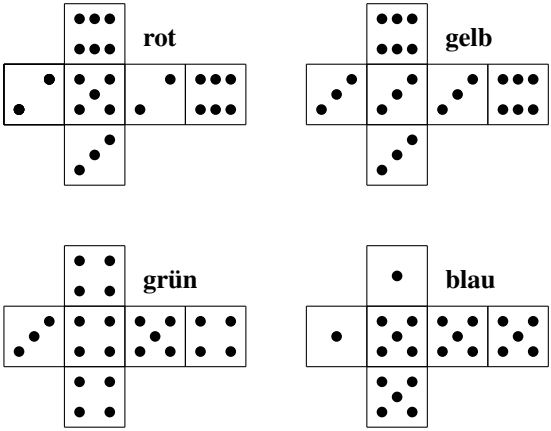


Abbildung 3.4: Gymnasium Melle 1999, Schriftl. Teil, Aufg. 1

- Du darfst dir zu Beginn einer jeden Runde einen der vier Würfel aussuchen. Martin wählt anschließend einen Würfel für sich aus.
- Nun werfen beide gleichzeitig ihren Würfel. Wer eine höhere Augenzahl geworfen hat, bekommt einen Punkt gutgeschrieben. Bei gleichen Augenzahlen erhält keiner einen Punkt.
- Eine Spielrunde besteht aus 50 Würfen mit denselben Würfeln. Gewonnen hat derjenige, der am meisten Punkte bekommen hat.

[1] nach Treitz, Norbert, in Ikarus 1/1985, S.23

Martin behauptet, dass er mit großer Wahrscheinlichkeit jedes Mal gewinnt, egal wie viele Runden ihr spielt.

Aufgabe 2 (Quadrat)[2]

Beweise: Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von Strecke $\overline{AB}$, N der Mittelpunkt von Strecke $\overline{BC}$ und P der Schnittpunkt von $\overline{CM}$ und $\overline{DN}$, dann gilt $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AP}\right|$, d. h. Strecke $\overline{AD}$ und Strecke $\overline{AP}$ sind gleichlang.

Aufgabe 3 (Primzahlen)[3]

a. Ermittle alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b. Untersuche, ob es eine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!
c. Beweise, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von mehr als drei aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt.

Aufgabe 4 (Bruchvergleich)[4]

Susi sitzt an ihren Hausaufgaben. Mathematik steht an, und auf ihrem Arbeitsblatt liest sie zwei positive echte Brüche, $^2/_5$ und $^3/_7$, und dazu die Frage: „Welcher von beiden Brüchen ist der größere?“ Susi möchte sich ein Verfahren ausdenken, das ihr diese Entscheidung erleichtert, und kommt auf folgende Idee:

Sie verändert jeden der beiden Brüche, indem sie deren Nenner durch die Differenz zwischen dem ursprünglichen Nenner und dem Zähler ersetzt. So wird aus $^2/_5$ der Bruch $^2/_{5-2}$, also $^2/_3$, und aus wird $^3/_7$ wird $^3/_{7-3} = {}^3/_4$. Diese Methode wendet sie auf die beiden neuen

[2] nach alpha 3/1989, S. 64, Verlag Volk und Wissen, Berlin
[3] nach Alpha 2/1989, S. 45
[4] aus ZEIT-Magazin 3/99

Brüche an: aus $^2/_3$ wird nun $^2/_1 = 2$, und aus $^3/_4$ wird $^3/_1 = 3$. Mithin, so schließt Susi: „ Da 3 offensichtlich größer als 2 ist, muß von den in der Aufgabe gegebenen Brüchen der zweite, $^3/_7$, größer sein als der erste, $^2/_5$.“

Susis Mathelehrer hat damit ein Problem. Als Experte müsste er nun der Klasse erklären, ob Susis Verfahren immer funktioniert; aber darüber muß er sich erst einmal in Ruhe den Kopf zerbrechen. Wir auch. Lässt sich Susis Verfahren auf zwei beliebige positive echte Brüche anwenden? Und hilft es jedesmal?

3.4.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Wegnehmspiel)[5]

Ein Spiel startet mit zwei Haufen von p bzw. q Steinen. Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd, wobei Spieler A beginnt. Wer am Zug ist, muss einen Haufen wegnehmen und den anderen in zwei Haufen zerlegen. Verloren hat, wer als erster keinen vollständigen Zug mehr ausführen kann.

a. Wähle $p = 3$, $q = 8$ und zeige, dass Spieler A den Gewinn erzwingen kann!
b. Untersuche für $p = 5$ und $q = 9$, ob entweder Spieler A oder Spieler B den Gewinn erzwingen kann!
c. Überlege für alle möglichen Werte von p und q, welcher Spieler den Gewinn erzwingen kann! Entwickle entsprechende Gewinnstrategien und begründe, dass sie zum Erfolg führen!

Aufgabe 2 (Weg im Dreieck)[6]

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC (s. Abb: 3.5). Auf der Seite $c = \overline{AB}$ ist ein Punkt S festgelegt. Von S geht parallel zur Seite $a = \overline{BC}$ ein Lichtstrahl aus.

[5] Aus MNU ...
[6] nach Cofman, Judita, How to solve

a. Zeige: der Lichtstrahl kommt zum Punkt S zurück!
b. Welchen Weg legt das Licht zurück von seinem Start in S bis zu seiner ersten Rückkehr nach S?

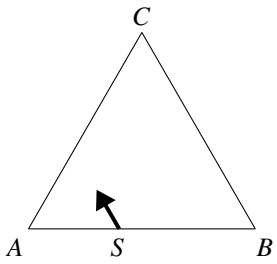


Abbildung 3.5: Gymnasium Melle 1999, Mündl. Teil, Aufg. 2

3.5 Gymnasium Oesede 2000

3.5.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Trapez)

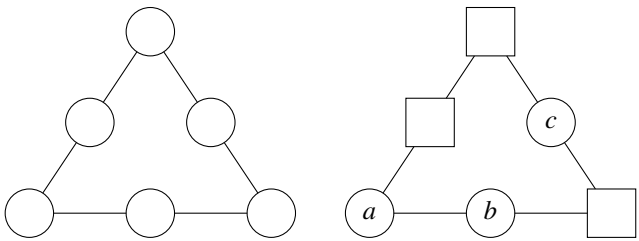
Bei einem Trapez sind drei Seiten gleich lang, die vierte Seite hat die doppelte Länge. Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen?

Aufgabe 2 (Primzahlzwillinge)

(3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43) usw. sind sogenannte Primzahlzwillingspaare. Weshalb ist für jedes Primzahlzwillingspaar $(p; q)$ mit $p > 10$ das Produkt $(p-1)\cdot(q-1)\cdot(q+1)$ durch 120 teilbar?

Aufgabe 3 (Magisches Dreieck)

a. Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sollen so auf die Markierungen in untenstehendem Dreieck (s. Abb. 3.6, linke Seite) verteilt werden, dass man stets die gleiche Summe erhält, wenn man die drei Zahlen einer Seite addiert („magisches Dreieck“). Wie viele „wesentlich verschiedene“ Lösungen, die sich nicht durch eine Kongruenzabbildung ineinander überführen lassen, gibt es?



Aufgabe 3)a Aufgabe 3)c

Abbildung 3.6: Gymnasium Oesede 2000, Schriftl. Teil, Aufg. 3

b. Wie lässt sich aus einem beliebigen Dreieck in Teil a) ein magisches Dreieck mit den Zahlen 43, 17, 69, 30, 82, 56 aufbauen? Beschreibe den Zusammenhang.
c. In magischen Dreieck in Abb. 3.6, rechte Seite, sind die Zahlen a, b und c bekannt. Nach welcher Formel kann man dann eine der drei übrigen Zahlen eindeutig berechnen? Um welche Zahl im Dreieck handelt es sich?

Aufgabe 4 (Offene Karten)

Vor zwei Spielern liegen 32 Karten eines Skatspiels aufgedeckt auf dem Tisch. Wie beim Skatspiel haben die Karten folgende Werte: Sieben: 7, Acht: 8, Neun: 9, Zehn: 10, Bube: 2, Dame: 3, König: 4 und As: 11. Für dieses Spiel haben aber die vier Farben keine Bedeutung.

Die Spieler müssen nun abwechselnd eine der aufgedeckten Karten nehmen und sie zu einem gemeinsamen Stapel aufeinander legen, wobei sie jeweils den Wert der gezogenen Karte zu dem Wert der bereits auf dem Stapel liegenden Karten addieren. Derjenige Spieler, der durch sein Legen genau den Wert 36 erreicht, hat gewonnen. Wer den Wert 36 überschreiten muss, hat verloren.

Wie müssen die Spieler vorgehen, um zu gewinnen? Hat jeder Spieler die gleiche Chance?

3.5.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Entfernungen)

In einem Land seien alle Entfernungen zwischen den Städten verschieden groß. Eines Tages startet in jeder Stadt ein Flugzeug zur nächstbenachbarten Stadt. Warum können dann in keiner Stadt mehr als fünf Flugzeuge ankommen?

Aufgabe 2 (Wer zuletzt kommt, den bestraft das Leben)

Julia und Jan machen sich über eine 6×10 -Tafel Schokolade her. Sie brechen abwechselnd längs der Rillen Teile ab und vertilgen sie. Wer

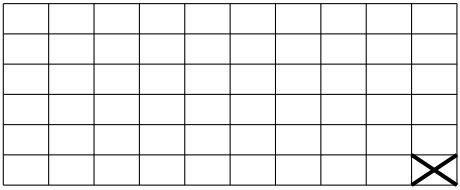


Abbildung 3.7: Gymnasium Oesede 2000, Mündl. Teil, Aufg. 2

das letzte Stück (X) erwischt, hat verloren: es ist verschimmelt (s. Abb. 3.7).

Julia fängt an. Versuche, eine Abbrechstrategie für sie zu entwickeln.

3.6 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2001

3.6.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Der Stern)

Ein Stern, wie hier abgebildet, ist völlig symmetrisch. Der Stern ist mit einem Bleistift ohne abzusetzen gezeichnet worden, dies entspricht einer „Wanderung“ des Bleistiftes von 400 cm. Wie groß ist der Abstand von einer Sternspitze zum Mittelpunkt des Sternes?

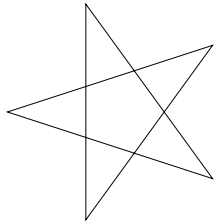


Abbildung 3.8:
Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium 2001, Schriftl. Teil, Aufg. 1

Aufgabe 2 (Fünfstellige Zahl raten)

1. Die Summe der ersten und zweiten Stelle ist die letzte Stelle.
2. Entweder ist die erste oder die zweite Stelle doppelt so groß wie die vierte Stelle.
3. Die mittlere Stelle ist eine 8.
4. Dreht man die Reihenfolge der Ziffern um, so wird die Zahl um 28 017 größer.

a. Wie heißt die Zahl?
b. Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es als Lösung, wenn nur die letzte Bedingung gilt?

Aufgabe 3 (Schulausflug)

Eine Gruppe von Schülern kehrt von einem Schulausflug von Osnabrück nach Melle zurück. Der gemietete Reisebus fällt aus, nur der Kleinbus mit 9 Plätzen (8 Mitfahrerplätze, 1 Platz für den Chauffeur) ist noch in Ordnung. Alle Personen sind in der Lage, die gesamte Strecke zu gehen. Daten:

- Es sind insgesamt 72 Schüler und Schülerinnen und 6 Erwachsene, die nach MeIle möchten.
- Die Strecke ist 30 km lang.
- Die durchschnittlichen Geschwindigkeiten betragen: zu Fuß 10 km/h, im Kleinbus 60 km/h.

Erstelle einen Plan, nach dem möglichst wenig Zeit vergeht, bis die letzte Person das Ziel erreicht. Als Verkehrsmittel stehen nur die eigenen Füße und der Kleinbus zur Verfügung! Wie lange dauert es mindestens, bis alle Personen Melle erreicht haben?

Aufgabe 4 (Der große Würfel)

Weiße Würfel der Kantenlänge 1cm werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Nach dem Zusammenbau werden einige der Seitenflächen des großen Würfels rot gestrichen. Zerlegt man (nach der Trocknung) den großen Würfel wieder in seine Einzelteile, so erhält man genau 175 kleine weiße Würfel. Die restlichen kleinen Würfel sind nun zum Teil rot gefärbt.

a. Aus wie vielen Teilen besteht der große Würfel?
b. Welche Flächen des großen Würfels wurden angemalt?

3.6.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Toilettenpapierrolle)

Eine gegebene Rolle hat die Länge 50 m. Das Papier ist $0,025$ cm dick. Von oben gesehen hat die Rolle einen Durchmesser von 14 cm.

a. Wie groß ist der Durchmesser, wenn die Hälfte des Papiers verbraucht ist?
b. Wie groß ist der Durchmesser der leeren Papprolle?

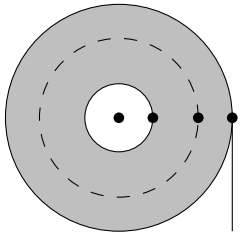


Abbildung 3.9:
Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium 2001, Mündl. Teil, Aufg. 1

Aufgabe 2 (Die Mütze)

Die Zahlen 1 bis 10 werden auf Karten geschrieben und in eine Mütze gelegt. Es werden zufällig zwei Karten gezogen. Die Differenz der auf den Karten notierten Zahlen wird gebildet und auf eine neue Karte geschrieben.

Die gezogenen Karten werden weggeworfen, die neue Karte wird in die Mütze gelegt. Es werden wieder zwei Karten gezogen. Der beschriebene Vorgang wiederholt sich, bis die beiden letzten Karten gezogen werden.

Frage: Ist die Differenz der letzten beiden gezogen Zahlen gerade oder ungerade?

3.7 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2002

3.7.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Erdbeeren)

Vater Krause weiß, dass seine drei Töchter gerne Erdbeeren essen. Deshalb stellt er eine Schüssel mit schönen roten Erdbeeren auf den Tisch und legt einen Zettel dazu, auf dem steht, dass sich jede der Töchter ein Drittel der Erdbeeren nehmen möge.

Luisa kommt als erste nach Hause und nimmt sich zunächst eine Erdbeere (so war die dann entstandene Menge nämlich durch drei teilbar) und dann den dritten Teil.

Claudia, die als zweite nach Hause kommt, glaubt aber, dass sie die erste wäre, nimmt sich zuerst zwei Erdbeeren (damit die restliche Zahl durch drei teilbar ist) und dann den dritten Teil.

Christine kehrt als letzte heim, ist aber ebenfalls der Meinung, die erste zu sein. Deshalb nimmt sie auch wieder zwei Erdbeeren (damit die restliche Zahl durch drei teilbar ist) und dann den dritten Teil.

Als Vater Krause am Abend wieder nach Hause kommt, wundert er sich, dass nur 56 Erdbeeren gegessen wurden, obwohl an sich viel mehr Erdbeeren da waren. Wie viele Erdbeeren waren anfangs in der Schüssel?

Aufgabe 2 (Dorfschullehrer)

Es war einmal ein Dorfschullehrer, der gerne Knobelaufgaben löste. Er sollte die Anzahl der Schüler seiner Dorfschule angeben. Er meldete sich am Telefon:

„Wenn sich meine Schüler in Reihen zu zwei, zu drei, zu vier, zu fünf, zu sechs aufstellen, so bleibt immer ein Schüler übrig. Erst wenn sich die Schüler in Reihen zu sieben aufstellen, stehen *alle* vollständig auf Vordermann.“

Kannst du die Anzahl der Schüler der Dorfschule angeben? Es sind weniger als 500 Schüler.

Aufgabe 3 (Vierecksfläche)

Drei kongruente Kreise liegen wie in der Zeichnung angegeben. Bestimme Flächeninhalt und Umfang des Vierecks $ABCD$ (siehe Abbildung 3.10).

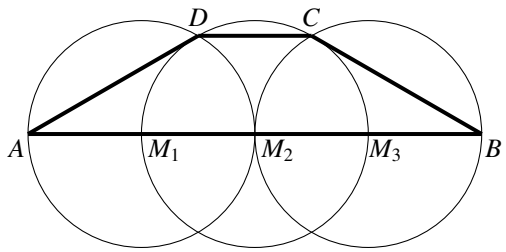


Abbildung 3.10:
Gymnasium „In der Wüste“ 2002, Schriftl. Teil, Aufg. 3

Aufgabe 4 (Eisenbahnnetz)

In Süddeutschland sollen die fünf Städte München, Stuttgart, Tübingen, Ansbach und Augsburg, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, durch ein Eisenbahnnetz (für die neuen Hochgeschwindigkeitszüge) verbunden werden, das aus vier geradlinigen (wegen der hohen Geschwindigkeiten) Strecken besteht (s. Abb. 3.11). Die Städte sollen jeweils auf den Endpunkten der Strecken liegen. Die Schienenstränge können sich dabei überschneiden; es werden keine Kosten gescheut und an den entsprechenden Stellen Brücken gebaut. (Im Beispiel 2 könnte also die Strecke „Stuttgart - Tübingen“ auch durch eine Strecke „Ansbach – Tübingen“ ersetzt werden.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten, solch ein Netz zu bauen, gibt es insgesamt? (Achtung: Bei einem „Netz“ spielt die Richtung keine Rolle!)

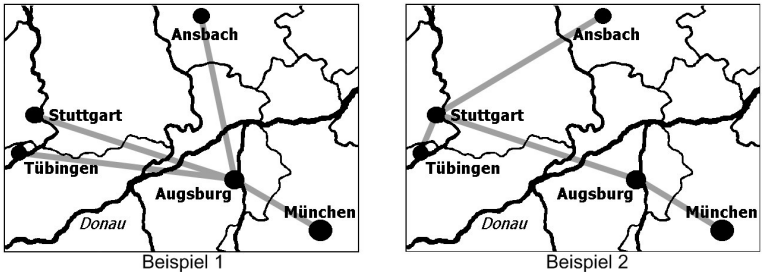


Abbildung 3.11:
Gymnasium „In der Wüste“ 2002, Schriftl. Teil, Aufg. 4

3.7.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Felder besetzen)

Abbildung 3.12:
Gymnasium „In der Wüste“ 2002, Mündl. Teil, Aufg. 1

In eine Reihe von n Feldern setzen zwei Spieler abwechselnd Spielsteine.

Spielvariante 1: Ein Zug besteht darin, einen Stein in ein freies oder zwei Steine in zwei *beliebige* freie Felder zu legen.

Spielvariante 2: Ein Zug besteht darin, einen Stein in ein freies oder zwei Steine in zwei *benachbarte* freie Felder zu legen.

Sieger ist in beiden Varianten jeweils, wer das letzte Feld besetzen kann. Gibt es für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 2 (Summe vierstelliger Zahlen)

Wie groß ist die Summe aller vierstelligen Zahlen, die man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden kann? Jede Ziffer darf nur einmal vorkommen. Die Aufgabe soll ohne Taschenrechner gelöst werden.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\
\mathbf{+} & & & & \vdots & \\
\mathbf{+} & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\mathbf{+} & & & & \vdots & \\
\hline
 & & & & \mathbf{?} &
\end{array}
$$

Abbildung 3.13:
Gymnasium „In der Wüste“ 2002, Mündl. Teil, Aufg. 2

3.8 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2003

3.8.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Logical Lehrer)

Marco hat im neuen Schuljahr drei neue Lehrer bekommen: Herrn Bolle, Herrn Knolle und Herrn Wolle. Einer der drei unterrichtet Deutsch, ein anderer Biologie und der dritte Mathematik. Zwei von ihnen, Herr Bolle und der Deutschlehrer, sind schon länger an dieser Schule. Ebenfalls zwei, Herr Wolle und der Biologielehrer, haben in Freiburg studiert, der dritte in Heidelberg. Herr Knolle ist jünger als der Mathematiklehrer und Herr Wolle ist älter als der Deutschlehrer. „ Na, dann weiß ich ja Bescheid!“ meint Petra.

a. Welche Fächer unterrichten Herr Bolle, Herr Knolle und Herr Wolle in Marcos Klasse?
b. Welcher der drei Lehrer ist neu an der Schule?

```
********  :  **  =  **8***
***
    **
    **
      ***
      ***
        0
```

Abbildung 3.14:
Gymnasium Carolinum 2003, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Aufgabe 2 (Sternchen)

Welche Ziffern stehen an Stelle der Sternchen in Abbildung 3.14?

Aufgabe 3 (Fünf Kreise)

Vier gleich große Kreise (Radius r) sind einem großen Kreis (Radius R) einbeschrieben. Berechne den Radius r in Abhängigkeit von R (siehe Abbildung 3.15).

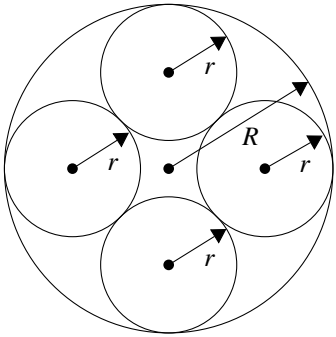


Abbildung 3.15:
Gymnasium Carolinum 2003, Schriftl. Teil, Aufg. 3

Aufgabe 4 (Tischtennisturnier)

Zu einem Doppelturnier im Tischtennis melden sich 18 Spieler. Wie viele verschiedene Paare können gebildet werden, wenn die Zusammenstellung zufällig erfolgt?

3.8.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Kostümfest)

Marco will zum Kostümfest seines Sportvereins gehen. „Was soll ich in diesem Jahr anziehen?“ fragt er Tante Clara, die am Theater arbeitet. „Nun, in deiner Größe haben wir zwei verschiedene lange und drei unterschiedliche kurze Jacken, zwei verschiedenfarbige Hosen und dann

noch ein paar lustige Hüte und Mützen! – Die drei flachen Mützen passen zu allem, aber die beiden hohen Hüte solltest du nicht zu einer kurzen Jacke anziehen. Das sieht unmöglich aus.“

Wie viele Möglichkeiten hat Marco, ein Kostüm, bestehend aus Jacke, Hose und Kopfbedeckung, nach Tante Claras Vorschlägen zusammenzustellen?

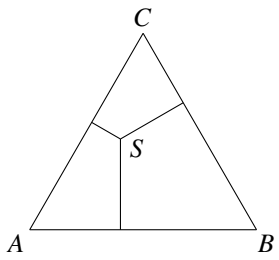


Abbildung 3.16:
Gymnasium Carolinum 2003, Mündl. Teil, Aufg. 2

Aufgabe 2 (Abstandssumme)

Man beweise: In einem gleichseitigen Dreieck ABC ist die Summe der Abstände von einem inneren Punkt S zu den Dreiecksseiten stets gleich der Höhe des Dreiecks.

3.9 Gymnasium Bersenbrück 2004

3.9.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Buntstifte)

Sabine betrachtet in einer Freistunde ihre Buntstifte und die ihrer Freunde. Dann stellt sie fest:

Ute besitzt doppelt so viele Buntstifte wie Regine, ich hingegen 13 weniger als Regine. Tatjana hat drei Stifte weniger als die beiden von uns, die die wenigsten Stifte haben, gemeinsam besitzen.

Wie viele Buntstifte besitzt jede von uns, wenn die Anzahl der Buntstifte, die wir zusammen besitzen, kleiner als 85 ist und deren Quersumme 13 beträgt?

Aufgabe 2 (Schustermesser)

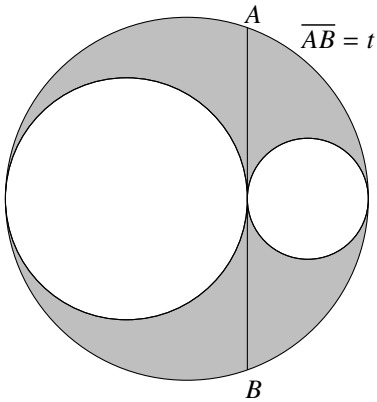


Abbildung 3.17:
Gymnasium Bersenbrück 2004, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Es ist eine allgemeine Formel für die Berechnung des in der Figur getönten Flächeninhaltes zu finden.

Aufgabe 3 (Gauß-Verschlüsselung)

C. F. Gauß hat gelegentlich seine Aufzeichnungen verschlüsselt. So gab er Daten aus seinem Leben dadurch an, dass er die Anzahl der bis zum betreffenden Datum vergangenen Lebenstage notierte.

Am 16. 7. 1799 erwarb er den Grad des Doktors; diesen Tag verschlüsselte er mit der Zahl 8113.

Das früheste derart verschlüsselte Datum in seinen Notizen war der Tag, an dem der 15-jährige Gauß sich mit Abzählungen zur Primzahlverteilung zu beschäftigen begann. Dieses Datum kennzeichnete er mit der Zahl 5343. Welchem Tag entspricht diese Zahl?

Aufgabe 4 (Ungleichung)

Für welche natürlichen Zahlen $a > b > 0$ ist die Ungleichung

$$\frac{a+b}{a-b} > a \cdot b$$

erfüllt?

3.9.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Kormoraninsel)

Die Kormoraninsel zählt acht durch viele kleine, direkte Straßen verbundene Dörfer. Diese Straßen teilen sich nie, zudem kreuzen sie sich auf keinen Fall außerhalb der Dörfer.

Wie viele kann es höchstens geben?

Aufgabe 2 (Tube)

Es ist das Volumen einer Tube zu bestimmen, die einerseits durch den Kreis, der durch Q', B, P' und A verläuft, andererseits am „zugekniffenen“ Ende durch die Strecke $\overline{PQ}$ begrenzt wird (s. Abb.3.18).

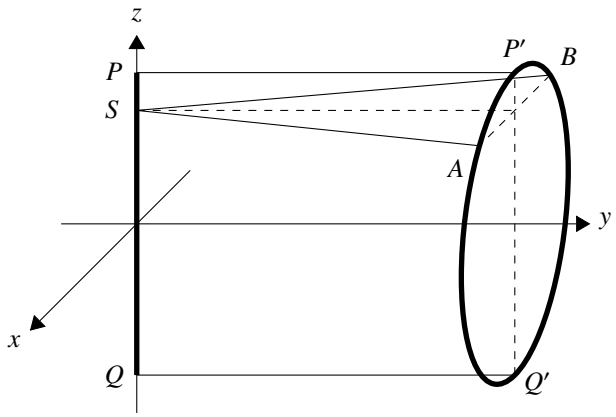


Abbildung 3.18:
Gymnasium Bersenbrück 2004, Mündl. Teil, Aufg. 2

3.10 Gymnasium Bad Essen 2005

3.10.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Comic-Hefte)

„Bei uns in der Garage liegen etliche meiner Comic-Hefte für den Flohmarkt bereit“, verkündet Torsten seinen Freunden. „Sie gehören zu drei Serien. Wenn ihr erratet, wie viele Hefte aus welcher Serie dabei sind, schenke ich euch den ganzen Packen. Kleiner Tipp: Es sind insgesamt 200 Hefte: Einzelne Mad-Hefte, einige Bündel mit drei Mickey-Mouse-Heften und einige Bündel mit je fünf Witch-Heften; ach ja, und es sind zehnmal so viele einzelne Mad-Hefte dabei wie Dreierbündel Mickey-Mouse-Hefte. Ihr habt nur einen einzigen Rate-Versuch.“

Ermittelt, wie viele Möglichkeiten nach Torstens Information noch zur Wahl stehen.

Aufgabe 2 (Querprodukt)

Fasst man die Ziffern einer Zahl als einstellige Zahlen auf, so bezeichnet man die Summe dieser einstelligen Zahlen als „Quersumme“, ihr Produkt als „Querprodukt“ der Ausgangszahl. (Beispiel: 82 990 hat die Quersumme $8+2+9+9+0 = 28$ und das Querprodukt $8\cdot2\cdot9\cdot9\cdot0 = 0$; 713 hat die Quersumme 11 und das Querprodukt 21.)

Wie viele durch vier teilbare Zahlen mit dem Querprodukt 30 und der Quersumme 12 gibt es? Bemüht euch bitte um eine systematische Darstellung eurer Begründung!

Aufgabe 3 (Kaninchen)

Jedes Kaninchenpaar bringt im Alter von zwei Monaten zum ersten Mal ein neues Kaninchenpaar zur Welt und danach unbegrenzt jeden Monat ein weiteres. Am Anfang des Jahres 2005 besitzt man ein Paar, das einen Monat alt ist.

a. Berechnet, wie viele Kaninchenpaare man am Ende des Jahres insgesamt hat.

b. a_1 sei die Anzahl aller nach dem ersten Monat neugeborenen Paare.
a_2 sei die Anzahl aller nach dem zweiten Monat neugeborenen Paare.
a_3 sei die Anzahl aller nach dem dritten Monat neugeborenen Paare.
$\vdots$
a_{100} sei die Anzahl aller nach dem hundertsten Monat neugeborenen Paare.
Ermittelt und begründet eine Beziehung, die es erlaubt, a_{100} mit Hilfe von *möglichst wenigen* der Zahlen a_1 bis a_{99} zu berechnen, und eine zweite Beziehung, die es erlaubt, a_{100} mit Hilfe von *möglichst vielen* der Zahlen a_1 bis a_{99} zu berechnen.

Aufgabe 4 (Hausfigur)

Die äußeren Seiten der Hausfigur in Abbildung 3.10.1 auf Seite 60 haben alle die Länge a. Anna hat zunächst die gestrichelten Verbindungsstrecken eingetragen, von ihnen dann nur den im unteren Quadrat liegenden Teil betrachtet und dann jeweils den Mittelpunkt dieser Teilstrecke geradlinig mit den weiter entfernt liegenden Quadratecken verbunden. Iffi meint dazu: „Schöne Figur. Deine neuen dickgezeichneten Strecken sehen genau so lang aus wie die äußeren Umrandungen.“ Zeigt, dass Iffis Vermutung richtig ist.

Hinweis: Es *kann* helfen, wenn ihr über dem unteren Quadrat ein zweites Quadrat der Seitenlänge a errichtet (Skizze ganz rechts).

3.10.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Logical Zeitreisen)

Auf einer „Zeitreise“ kommen die Mathematiker Gauß, Euler Hilbert, Leibniz und Riemann gleichzeitig in demselben Hotel an und belegen die nebeneinander liegenden Zimmer 201 bis 204. Die drei Zimmerkellner kennen die Personen kaum; bei der Zimmeraufteilung bekommen

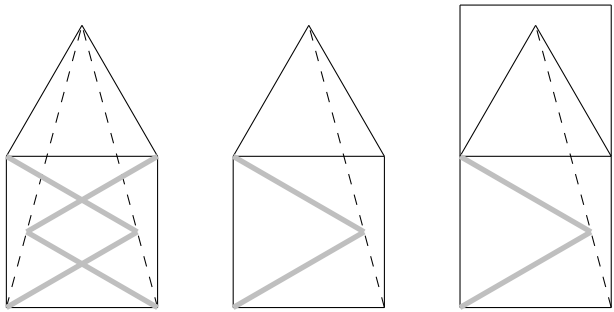


Abbildung 3.19:
Gymnasium Bad Essen 2005, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4

sie mit, dass Gauss und Riemann jeweils eines der „Randzimmer“ 201 und 205 nehmen (einer der beiden fürchtet wohl das Schnarchen des anderen). Nach der gemeinschaftlichen Abfrage der Getränkewünsche der Gäste haben die drei (etwas verkalkten) Kellner schnell vieles vergessen. Sie sind sich einig, dass fünf verschiedene Getränke bestellt worden sind (Apfelsaft, O-Saft, Kaffee, Tee und Wasser) und dass in den fünf Zimmern jeweils ein einziger Gegenstand auf dem Tisch lag, in jedem Zimmer ein anderer (Fellmütze, Globus, Keksdose, Landkarte und Rechenschieber). Aber welches Getränk kommt wohin und wer wohnt wo? Sie tragen nun zusammen, was sich jeweils mindestens einer von ihnen gemerkt hat:

i. Tee und Kaffee gehören in benachbarte Zimmer, der O-Saft kommt in Zimmer 202.
ii. Der Mann mit dem Globus hat Apfelsaft verlangt, und das war nicht im mittleren Zimmer, sondern im Zimmer hinter (größere Zimmernummer) dem Zimmer mit der Fellmütze.
iii. Kaffee wurde nicht von Euler, sondern von dem Mann mit dem Rechenschieber bestellt.

iv. Der Globus steht nicht bei Gauß, und Leibniz hat eine Keksdose auf dem Tisch.

Ermittelt, in welchem Zimmer das Wasser zu servieren ist und in welchen Raum der Brief gebracht werden muss, der heute morgen für Herrn Hilbert abgegeben worden ist.

Aufgabe 2 (Tetraeder)

„Mein Opa hat mir gestern drei Tetraeder gezeigt, einen grünen, einen gelben und einen roten“, berichtet Fridolin. (Ein Tetraeder ist ein Körper mit vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen.)

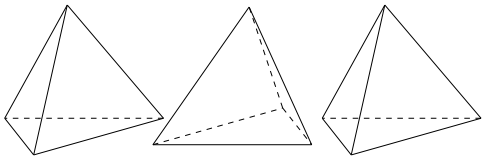


Abbildung 3.20:
Gymnasium Bad Essen 2005, Klasse 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 2

„Auf den zwölf Seiten, die die drei Tetraeder zusammen haben, waren die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 zu sehen. Die 1 stand auf dem grünen, die 2 auf dem gelben und die 3 auf dem roten Tetraeder. Man Opa wollte, dass wir um die höhere Augenzahl würfeln. Ich sollte mir zunächst einen der drei Tetraeder aussuchen. Danach, meinte mein Opa, könnte er unter den verbleibenden beiden auf jeden Fall so wählen, dass die Gewinnchancen 9 zu 7 für ihn stehen.“ – „Wie sollen die Dinger denn genau beschriftet gewesen sein?“ fragt ein Kamerad kopfschüttelnd.

„Ich erinnere mich noch an den gelben Tetraeder“, meint Fridolin. „Außer der 2 standen auf dem die 5, die 7 und die 12; das weiß ich genau, denn der 2. 5. und der 7. 12. sind die Geburtstage meiner Eltern. Wir haben eine Weile gewürfelt und immer neu gewählt. Wenn ich mich

für den grünen Tetraeder entschieden habe, hat mein Opa den gelben genommen. Wenn ich den gelben wollte, hat er mit dem roten gewürfelt. Und wenn ich den roten gewählt habe, hat er zu meinem Erstaunen den grünen gegriffen.“

Gibt es eine Ergänzung der Beschriftung von grünem und rotem Tetraeder, die zu Aussagen und Verhalten von Fridolins Opa passt? Vielleicht sogar mehrere?

3.10.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Alter)

„Heute nachmittag fahre ich mit meiner Tante Inliner“, freut sich Sandra. „Wie alt ist sie denn?“ will eine Freundin wissen. „Das weiß ich nicht so genau“, meint Sandra. „Aber gestern hatte sie Geburtstag, und auf die Frage, wie alt sie denn nun geworden sei, hat sie ihren Gästen geantwortet, dass sie im Jahre $x \cdot x$ ihren x-ten Geburtstag feiern werde.“

Wie alt ist Sandras Tante gestern geworden? Begründet eure Antwort; es soll dabei auch deutlich werden, warum kein anderes Alter als das von euch angegebene in Frage kommt.

Aufgabe 2 (Bastelbogen)

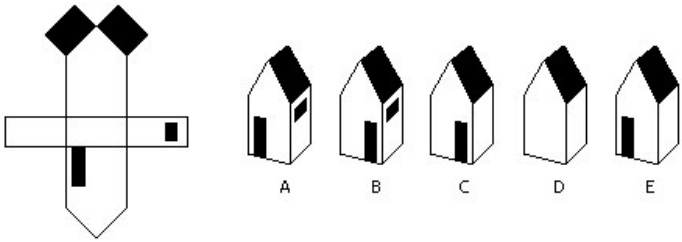


Abbildung 3.21:
Gymnasium Bad Essen 2005, Klasse 5 – 6, Aufg. 2

Stellt euch vor, ihr bastelt aus in Abbildung 3.21 links dargestellten Figur eines Bastelbogens ein Haus. (Beachtet, dass nur auf einer Seite des Bastelbogens die schwarzen Einfärbungen für Dachflächen, Tür und Fenster zu sehen sind.)

Welches der daneben stehenden Häuser wird entstehen? Erklärt, ohne wirklich zu basteln, warum nur die Zeichnung mit dem von euch gewählten Buchstaben passen kann.

Aufgabe 3 (Geheimzifferen)

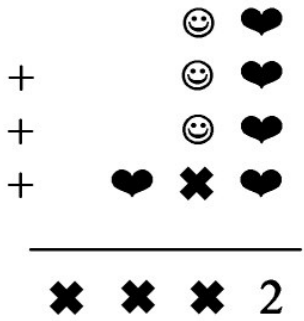


Abbildung 3.22:
Gymnasium Bad Essen 2005, Klasse 5 – 6, Aufg. 3

Tim findet die „normalen“ Ziffern langweilig. Deshalb schreibt er häufig andere Zeichen anstelle der normalen Ziffern. Natürlich malt er dabei verschiedene Zeichen für verschiedene normale Ziffern, gleiche Zeichen für gleiche normale Ziffern. Welche richtige Rechnung verbirgt sich hinter dem, was Tim hier aufgeschrieben hat? Schreibt sie mit normalen Ziffern auf und begründet, dass Tims Zeichen nur so verstanden werden können wie in eurer Lösung.

3.11 Greselius-Gymnasium Bramsche 2006

3.11.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Magische Kreise)

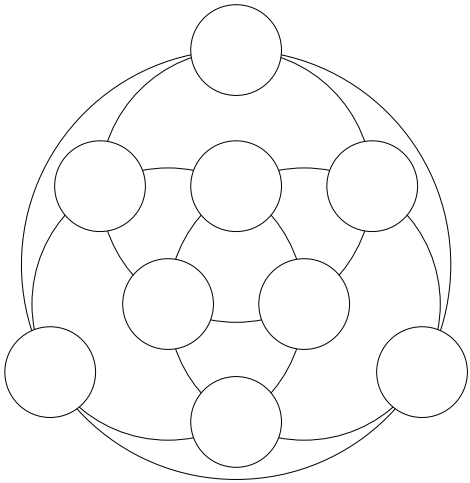


Abbildung 3.23:
Greselius-Gymnasium Bramsche 2006, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 1

Die natürlichen Zahlen aus dem Intervall von 2 bis 10 sollen so auf die neun Felder der Figur verteilt werden, dass die Summe der Zahlen auf jedem der vier Kreise gleich ist. Wie viele grundsätzlich unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten gibt es?

Aufgabe 2 (Tangentendreieck)

Konstruiere ein solches Tangentendreieck und beschreibe die Konstruktion. Die Geraden durch A und B, durch B und C, sowie E und F

sind Tangenten an den gegebenen Kreis. E, F und B sind die Schnittpunkte der Tangenten. D liegt auf der Kreislinie und auf der Tangente durch F und E.

Wähle für $|AB| = |BC| = 8$cm.

Bestimme den Umfang des Dreiecks BEF.

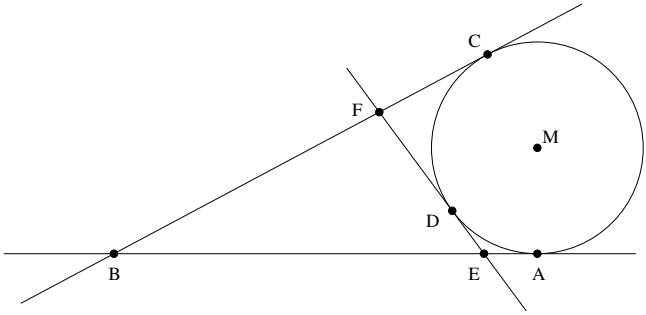


Abbildung 3.24:
Greselius-Gymnasium Bramsche 2006, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Aufgabe 3 (Aufteilungsprobleme)

Opa bringt seinen sieben Enkelkindern einen Korb voller Äpfel mit. Er sagt: „Wenn der Zweitjüngste einen Apfel mehr erhält als der Jüngste, der Drittjüngste wieder einen Apfel mehr als der Zweitjüngste usw., dann bleibt kein Apfel im Korb übrig!“

Die Kinder finden diese Aufteilung ungerecht und beschließen, dass jeder gleich viele Äpfel erhalten soll. Ist das möglich?

Beantworte die Frage auch für 5, 6, 8, 9, 10 Kinder und beliebig viele Kinder.

Aufgabe 4 (Drei Geraden)

Gegeben sind drei Geraden. Man zeichne einen Kreis, der zwei Geraden berührt und dessen Mittelpunkt auf der dritten Geraden liegt.

Für welche Lagen der Geraden ist die Konstruktion nicht durchführbar?

Wie viele Lösungen gibt es in den anderen Fällen?

3.11.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Das Rechengenie)

Es wird eine beliebige 7-stellige Ziffernfolge notiert und dieselbe Zahl, um eine Stelle nach rechts verschoben, nochmals darunter geschrieben. An die obere Ziffernfolge wird rechts eine Null angehängt, dann wird die zweite Zahl von der ersten subtrahiert. Aus der erhaltenen Differenz streicht man eine beliebige Ziffer weg und liest die verbliebenen Ziffern in beliebiger Reihenfolge dem Rechengenie vor. Der nennt nach kurzer Zeit die zuvor gestrichene Ziffer.

Wie ist das möglich?

Aufgabe 2 (Abwechslungsreiche Kost)

Die Besitzerin einer Fernfahrerkneipe hatte einen recht großen festen Kundenstamm und so war ihr eine abwechslungsreiche Speisenfolge ein Grundanliegen. Sie entwarf einen Speiseplan, der sicherstellen sollte, dass sich keine zwei Mahlzeiten im Laufe eines Jahres wiederholen würden.

Die vier Teile einer Mahlzeit bestanden aus (i) einer Sättigungsbeilage, (ii) Fleisch oder Fisch, (iii) einem Gemüse, (iv) einer süßen Nachspeise. Hier ihr Plan:

Zu Jahresbeginn servierte sie Pommes Frites, Schweinefleisch, Erbsen und ein Stück Kuchen. Jeden folgenden Tag ersetzte sie jeden Teil des Mahles durch den darauffolgenden Teil der entsprechenden Spalte. Auf das letzte Gericht einer Spalte folgte wieder das erste derselben Spalte.

a. Eines Tages setzte sich die Mahlzeit aus Reis, Fisch, Bohnen und einem Stück Kuchen zusammen, am nächsten Tag würden dann

Sättigungsbeilage	Fleisch /Fisch	Gemüse	Nachspeise
Pommes Frites gekochte Kartoffeln Bratkartoffeln Reis	Schwein Lamm Huhn Fisch Rind	Erbsen Möhren Mais Kohl Lauch Spinat Bohnen	Kuchen Eis Früchte

Abbildung 3.25:
Greselius-Gymnasium Bramsche 2006, Klass 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 2

Pommes Frites, Rind, Erbsen und Eis angeboten werden. Wie viele Tage müssten vergehen, ehe eine Mahlzeit in derselben Kombination wieder auf den Tisch gebracht wird?

b. Welches Mahl wird am Tage 100 nach Inkrafttreten der Tabelle serviert?
c. An welchem Tag könnte man Bratkartoffeln, Lamm, Spinat und ein Stück Kuchen erwarten?
d. Die Kneipe wurde wegen ihres abwechslungsreichen Menüs so berühmt und entsprechend gut besucht, dass die Besitzerin einen zusätzlichen Koch einstellen musste. In der Annahme, der Besitzerin einen Gefallen zu tun, verlängerte er die Fleischspalte um Wurst und die Gemüsespalte um Rüben. Warum wurde er von der Besitzerin unverzüglich gefeuert?

3.11.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Logelei)

Ein Bayer, ein Niedersachse, ein Hesse, ein Thüringer und ein Sachse bewohnen eine kleine Wohnkolonie, welche aus 5 einfarbigen Häusern

besteht, die nebeneinander in einer Reihe stehen. In jedem wohnt ein Mann, der genau ein Haustier besitzt, nur genau ein Getränk mag und genau eine Lieblingsspeise hat. Außerdem ist Folgendes bekannt:

A. Der Bayer wohnt in dem roten Haus.
B. Der Sachse hat einen Hund.
C. Im grünen Haus wird Kaffee getrunken.
D. Tee trinkt der Hesse.
E. Gleich links neben dem weißen steht das grüne Haus.
F. Der Mann, der Fisch isst, besitzt einen Goldhamster.
G. Pizza isst man im gelben Haus.
H. Im Haus in der Mitte gibt es Milch zu trinken.
I. Der Thüringer wohnt im Haus ganz links.
J. Der Mann, der Spaghetti isst, ist der direkte Nachbar des Herrn mit der Katze.
K. Pizza wird im Hause neben jenem gegessen, in dem das Pferd steht.
L. Derjenige, der Kuchen isst, trinkt auch Orangensaft.
M. Der Niedersachse isst nur Suppe.
N. Das Haus des Thüringers steht neben dem blauen Haus.

Wer trinkt Wein und wem gehört das Kamel?

Aufgabe 2 (Magische Kreise)

In die Felder in Abbildung 3.26 sind die Zahlen 1 bis 16 so einzutragen, dass die Addition auf allen Linien einschließlich des Mittelpunktes 51 ergibt. Dabei ist zu beachten, dass auch jeweils die Summen der beiden Kreise, abzüglich des Mittelpunktes, 51 ergeben.

Gibt es mehrere Möglichkeiten?

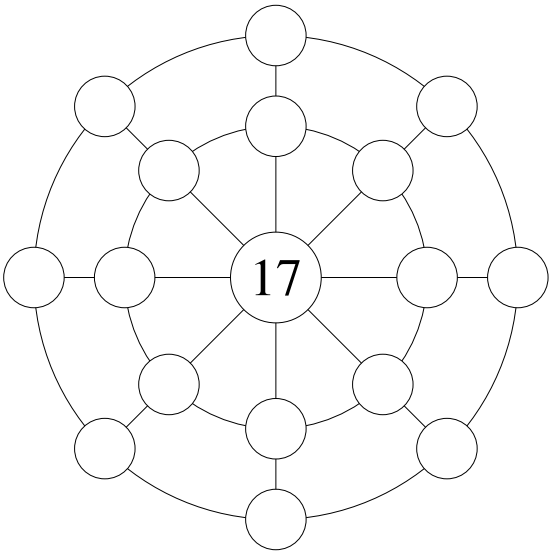


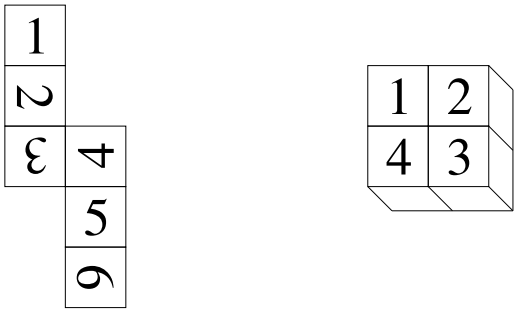
Abbildung 3.26:
Greselius-Gymnasium Bramsche 2006, Klasse 5 – 6, Aufg. 2

3.12 Gymnasium Bad Iburg 2007

3.12.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Der GBI-Würfel)

Abweichend vom normalen Spielwürfel trägt der GBI-Würfel Ziffern statt Punkte. Auf dem Würfelnetz seht Ihr, wie die Zahlen auf dem GBI-Würfel verteilt sind. Vier dieser Würfel werden zusammengelegt. Von oben sieht das dann so aus:



Würfelnetz vier Würfel

Abbildung 3.27:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 1

a. Stellt Euch vor, Ihr würdet die vier Würfel von unten anschauen. Dreht dabei jeden einzelnen Würfel in die Richtung des Betrachters. Zeichnet die untere Fläche. Achtet auf die richtige Lage der Ziffern!
b. Jeder der 4 Würfel hat vier Seitenwände. Bestimmt die Summe der Ziffern, die auf den 16 Seitenwänden stehen. Beschreibt, wie Ihr auf Eure Lösung gekommen seid!

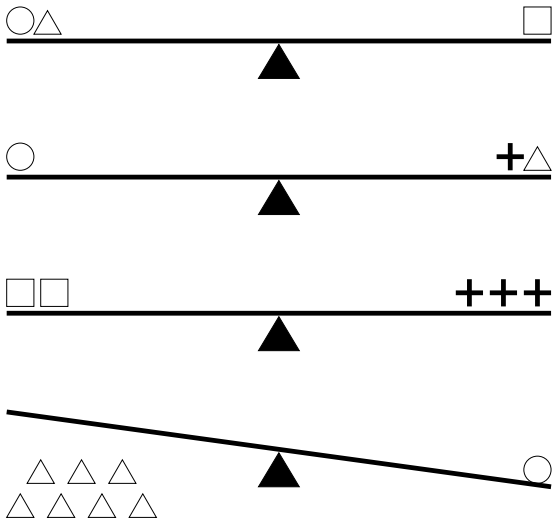


Abbildung 3.28:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Aufgabe 2 (Wiegeproblem)

Wie viele Dreiecke wiegen den Kreis auf der vierten Waage auf (siehe Abbildung auf der nächsten Seite)?

Beschreibt, wie Ihr auf Eure Lösung gekommen seid!

Aufgabe 3 (Showdown auf dem Ferienhof)

Jörg the Kid stand mit zusammengekniffenen Augen an der Straße nach Heimsdorf City. Nervös kaute er auf einem Grashalm. Sechzehn Meter waren es bis zur Kreuzung. Von da noch einmal acht Meter im rechten Winkel nach rechts auf der Einfahrt zur Piepenbrink Ranch. Und dort, genau an jener Stelle, stand sein Gegner in diesem Kampf. In dem

Gefecht, dass das letzte für ein Jahr sein sollte.

Jörg the Kid spuckte auf den Boden. Seine Freiheit war in Gefahr. Freiheit, die für ihn alles bedeutete. Wenigstens solange er keinen Hunger oder Durst hatte. Breitbeinig stellte er sich selbstbewusst mit der Front zum Feind an den Straßenrand.

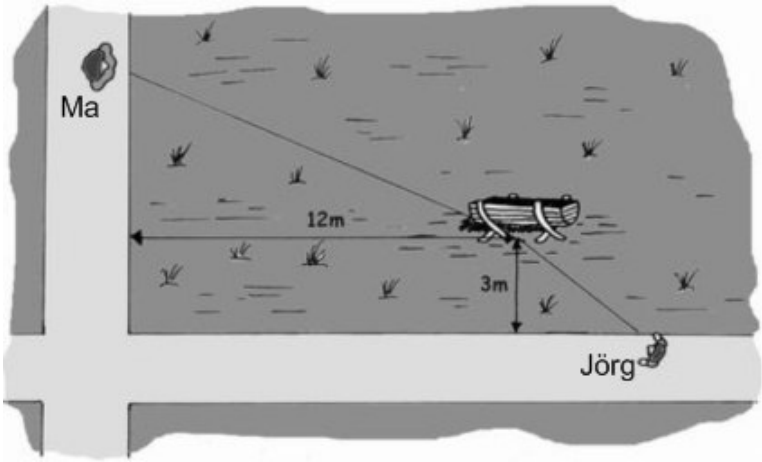


Abbildung 3.29:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3

„Komm jetzt, Jörg! Wir wollen nach Hause fahren!“, rief Cleaning Ma von der Einfahrt zur Ranch. Wieder spie er aus. „Wenn du mich willst, musst du mich holen“, antwortete er, „sauber kriegst du mich nie!“ Der Grashalm in seinem Mund rotierte schneller. Es war keine leere Drohung, die er da ausgesprochen hatte. Zwischen ihm und Cleaning Ma lag eine wunderbar schlammige Wiese, die selbst in diesen heißen Tagen noch voller herrlichem Morast war. Mochte Ma auch schnell sein, Jörg brauchte sich nur zur Seite fallen zu lassen, um sie zu besiegen. Ein

kleiner Wälzer nach links, genüssliches Rollen nach rechts – und er war von oben bis unten rundum eingeschlammt.

Cleaning Ma zögerte. Sie hatte die Gefahr erkannt. Mit scharfem Blick erkundete sie das Gelände. Es gab nur zwei mögliche Wege, um zu Jörg the Kid zu gelangen. Der eine führte über die Einfahrt zur Ranch und die Straße nach Heimsdorf City. Auf beiden würde sie mit fünf Metern pro Sekunde laufen können. Der andere Weg war direkter, wenngleich nicht ganz gerade. Es ging auf einigermaßen trockenen Bereichen der Wiese entlang. Von ihrem jetzigen Standpunkt zum Futtertrog, der drei Meter von der Straße und zwölf Meter von der Einfahrt entfernt war. Und vom Futtertrog zu ihrem Sohn, dem Desperado. Insgesamt kürzer, aber beschwerlicher. Auf dieser Route würde sie nur drei Meter pro Sekunde schaffen.

In der Ferne schlug die Kirchenglocke zwölf Uhr. Die Nerven waren zum Zerreißen gespannt. Cleaning Ma musste sich entscheiden. Auf welchem Weg würde sie Jörg the Kid schneller erreichen? Und wie groß wäre der Zeitunterschied?

Beschreibt, wie Ihr auf Eure Lösung gekommen seid!

Aufgabe 4 (Elf Freunde sollt ihr sein)

Die Engländer haben das Fußballspiel erfunden. Doch, ehrlich! Noch vor den Chinesen. Weit vor ihnen sogar. Das beweisen jüngste Studien, die sich intensiv mit der Entstehungsgeschichte der berühmten kugelrunden Felsbrocken namens Rolling Stones beschäftigt haben. Die Forschungsergebnisse erlauben selbst eine Rekonstruktion, warum ausgerechnet elf Spieler eine Mannschaft bilden.

Auf diesem Feld soll die Stammwiese für das abendliche Johlritual entstehen? Unmöglich. Nicht, solange es hier noch aussieht wie in der Steinzeit. „Wir haben zu tun etwas Aufräumarbeit, haben wir nicht?“, fragt Grumpf seinen Johlpartner Urks. „Wir haben!“, bestätigt Urks.

„Also, lass uns starten mit räumen auf“, schlägt Grumpf vor. „Jeder von uns zwei räumt auf genau die Hälfte.“ Grumpf ist ein Steinzeitmann der Tat. Urks ist das nicht. Seine Sache ist eher gewiefte Taktik. Und so zählt er rasch die beiseite zu schaffenden Felsen. Mit einem Ergebnis,

das von entscheidender Bedeutung für die unmittelbar bevorstehende Geburt der Sportart Fußball ist.

„Das wird nicht sein möglich“, sagt Urks. „Wir können nicht tragen weg die Hälfte der Steine jeder. Weil du kannst nicht teilen ihre Zahl durch zwei.“

Grumpf beendet sein Krempeln. Nicht jeder genau die Hälfte? Was bedeutet, einer müsste mehr arbeiten als der andere? Undenkbar. Das wäre nicht fair! „Dann wir holen Bork, zu unterstützen uns“, entscheidet Grumpf. Ein echter Mann der Tat, wie gesagt. Bork kommt, Bork krempelt die Ärmel hoch, Urks hat schlechte Nachrichten. „Selbst zusammen mit Bork wir können nicht teilen die Aufgabe fair. Du kannst nicht teilen die Zahl der Felsen durch drei. Ein Stein wird bleiben liegen.“ Nicht fair ist nicht gut, was würde man sonst auf dem Kontinent denken.

Zur Unterstützung eilt Knorps herbei. „Kein Teilen durch vier ohne Rest von ein Stein.“ Hinzu kommt Klink. „Nicht durch fünf. Ein Stein bleibt.“ Tong stößt hinzu. Dann Glotsch, Paff, Schnirks und Thithery. „Keine Teilung ohne Rest von ein Stein.“ Grumpf kratzt sich mit einem Bärenknochen den Rücken. „Dann vielleicht wir sollten geben auf“, überlegt er.

Da schlendert Kohn des Wegs. Kohn, den leicht der Jähzorn überkommt. Kohn, der Steine in den Händen trägt, statt sie mit den Füßen zu treten. „Was geht, Leute?“, fragt Kohn und blickt dabei in die Wolken. „Wir können nicht räumen auf unseren Johlplatz, weil wir können nicht teilen die Aufgabe fair“, erläutert Grumpf das Problem. Kohn schaut sich die Wolken an.

Währenddessen zählt Urks nach. Und noch einmal. Grumpf kratzt sich, Kohn betrachtet Wolken, und Urks zählt ein drittes Mal. „Zusammen mit Kohn wir können teilen die Steine fair“, verkündet er dann. Grumpf, Bork, Knorps, Klink, Tong, Glotsch, Paff, Schnirks und Thithery sehen Urks erwartungsvoll an. Kohn hat neue Wolken entdeckt. „Mit elf Spieler unsere Mannschaft ist komplett“, erklärt ihnen Urks. „Wir können fangen an zu bringen die Felsen weg. Jeder von uns die gleiche Anzahl. Und es wird bleiben liegen kein Stein.“

Was nicht überliefert ist: Wie viele Steine mussten mindestens vom Platz geräumt werden?

Beschreibt, wie Ihr auf Eure Lösung gekommen seid!

3.12.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Partyspaß)

Abbildung 3.30:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 1

Um Mitternacht holt Susi drei rote und zwei grüne Mützen und spielt mit drei Gästen ihrer Geburtstagsparty das folgende Spiel: Sarah, Claus und Robin setzen sich auf drei Stühle, die hintereinander stehen. Susi löscht das Licht; es ist stockfinster und sie setzt jetzt jedem der drei eine der fünf Mützen auf. Das Licht wird wieder eingeschaltet. Niemand darf sich umdrehen.

Sarah sieht nur die Mützen von Claus und Robin, Claus nur die von Robin und Robin kann keine der Mützen sehen.

- Sarah: „Ich kann nicht genau entscheiden, ob ich eine rote oder

grüne Mütze trage!“

- Claus: “Ich kann nicht genau entscheiden, ob ich eine rote oder grüne Mütze trage!“
- Robin: „Ich weiß, welche Farbe meine Mütze hat.“

Aufgabe 2 (Aprilwetter)

Ersetzt in Abbildung 3.12.2 jeweils verschiedene Buchstaben durch unterschiedliche Ziffern. Findet mindestens eine mögliche Lösung.

$$\begin{array}{rccccc} & R & E & G & E & N \\ + & S & O & N & N & E \\ \hline & A & P & R & I & L \end{array}$$

Abbildung 3.31:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 2

3.12.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Holzwürfel, einfarbig)

Tims kleiner Bruder Max hat aus Holzwürfeln eine quadratische „Burg“ gebaut, die hier von vorn und von rechts fotografiert wurde.

a. Wie viele Würfel hat Max dafür höchstens gebraucht?
b. Wie viele Würfel waren es mindestens?

Beschreibt, wie Ihr auf Eure Lösung gekommen seid!

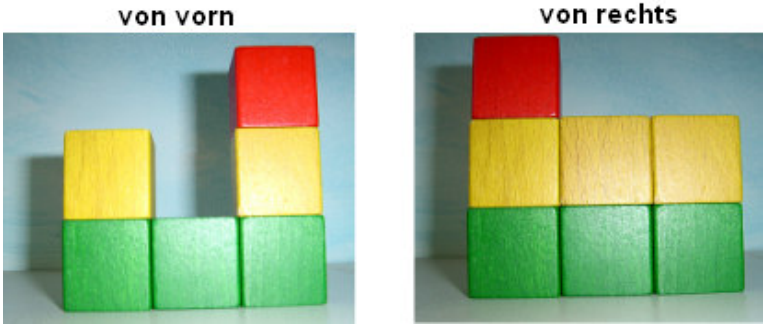


Abbildung 3.32:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 5 – 6, Aufg. 1

Aufgabe 2 (Die Reise ins Land der Knobolde)

Um in das geheimnisvolle Land der Knobolde zu gelangen, müsst ihr zunächst nach dem Weg fragen. An einer Kreuzung stehen drei Hexen kichernd an einem Stein und erwarten euch. Leider nehmen es nicht alle Hexen mit der Wahrheit sehr genau, obwohl sie alle sehr freundlich sind. Von den drei Hexen an der Kreuzung sagt eine stets die Wahrheit und eine lügt immer. Die dritte, unentschlossene Hexe spricht manchmal die Wahrheit, mal lügt sie auch. Auf eure Frage, wer sie sind, antworten die drei wie in Abbildung 3.33 wiedergegeben.

Nun seid ihr dran! Welche Hexe sagt immer die Wahrheit, wer lügt stets und wer ist die unentschlossene Hexe?

Beschreibt, wie Ihr auf Eure Lösung gekommen seid!

Abbildung 3.33:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 5 – 6, Aufg. 2

Aufgabe 3 (Wiegeproblem II)

Ein Glücksschwein mit Hut, Würfel und Kugeln werden gewogen (siehe Abbildung 3.34).

Im oberen und im mittleren Bild ist die Waage im Gleichgewicht.

Nun zum unteren Bild:

Wie viele Kugeln sind in die rechte Schale zu legen, um das Glücksschwein aufzuwiegen?

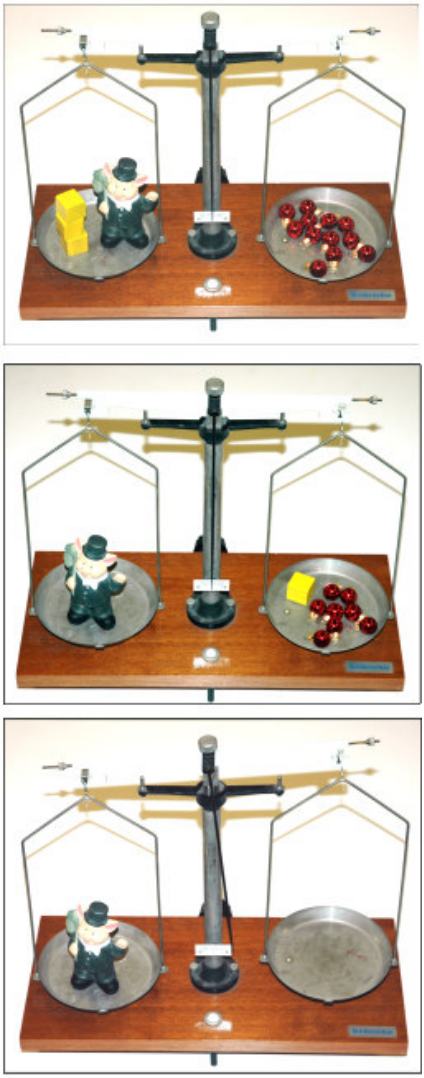


Abbildung 3.34:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 5 – 6, Aufg. 3

3.13 Ratsgymnasium Osnabrück 2008

3.13.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Defekter Fahrstuhl)

Ein defekter Fahrstuhl in einem Hochhaus mit 72 Stockwerken lässt sich nur mit zwei Knöpfen, einem roten und einem grünen, in Bewegung setzen. Drückt man den roten Knopf, fährt der Lift – ohne anzuhalten – genau sieben Etagen nach oben; wird dagegen der grüne Knopf getätigt, bewegt er sich exakt neun Stockwerke tiefer.

a. Zeige, dass es möglich ist, mit dem Aufzug vom ersten(!) in den 72. Stock zu gelangen. Gib hierzu mehrere Lösungen an (maximal drei).
b. Welche Mindestanzahl von Knopfdrücken ist notwendig?
c. Sei k die Anzahl der Knopfdrücke des roten, m die Anzahl der Knopfdrücke des grünen Knopfes. Entwickle eine Formel, die mit Hilfe von m und k das erreichen des 72. Stockwerkes beschreibt.
d. Gib eine mögliche Tastenkombination an, die mit den wenigsten Knopfdrücken auskommt!

Aufgabe 2 (Würfel mit Dreieck)

Ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ hat die Kantenlänge 1 (s. Abb. 3.35). Auf seiner Kante BC liegt ein Punkt J mit $3 \cdot |CJ| = |BC|$, auf der Kante $A'D'$ ein Punkt M mit $3 \cdot |A'M| = |A'D'|$. Bestimme den Umfang des Dreiecks MDJ.

Aufgabe 3 (Heuvorrat)

Ein Bauer hatte drei Kühe, drei Schafe und drei Ziegen. Aufgrund einer schlechten Heuernte reichte der Heuvorrat nicht

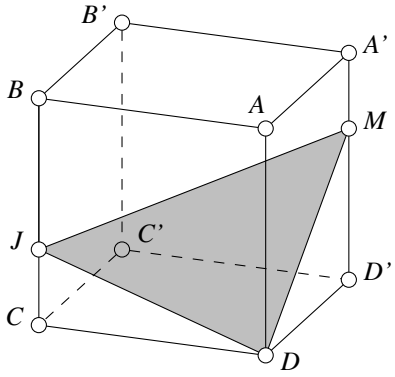


Abbildung 3.35:
Ratsgymnasium 2008, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2

für den kommenden Winter. Deshalb stellte der Bauer folgende Überlegungen an:

„Hätte ich die Ziegen abgeschafft, hätte das Heu für 45 Tage gereicht, ohne die Schafe hätte es für 60 Tage und ohne die Kühe für 90 Tage gereicht.“

„Da ich für mindestens 5 Monate Heu brauchte, hätte ich die meisten Tiere verkaufen müssen. Das wollte ich aber nicht, also behielt ich sie alle. Ich hatte gerade meine letzte Gabel Heu verfüttert, als mich mein Nachbar besuchte und mir erzählte, er könne mir mit Heu für den restlichen Winter aushelfen.“

„Wie lange hatte ihr eigenes Heu eigentlich gereicht?“, wollte der Nachbar wissen. Daran konnte sich der Bauer jedoch nicht mehr erinnern.

Könnt ihr herausbekommen, für wie viele Tage es gereicht hatte?

Aufgabe 4 (Tablettenfilm)

Bernd ist krank und muss Tabletten nehmen. Diese sind in einer mit Alufolie verschlossenen Palette enthalten, welche die Form eines Rechtecks aus 5×2 Quadraten hat. In jedem Quadrat befindet sich eine Tablette. Als er von den 10 Tabletten die vierte entnommen hat, überlegt er sich, ob es denn sehr viele Muster aus 6 vorhandenen und 4 fehlenden Tabletten gibt. Dabei sollen zwei Muster gleich sein, wenn sie durch Drehen der Palette um 180° ineinander übergehen (siehe Abbildung 3.36).

Wie viele Muster gibt es?

Beispiel:

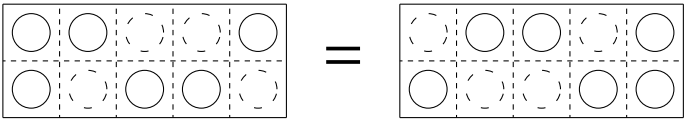


Abbildung 3.36:
Ratsgymnasium 2008, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4

3.13.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Eisenbahnbrücke)

Herr Müller steht am Ende einer langen Eisenbahnbrücke, über die ein Güterzug aus lauter Kesselwagen fährt. Herr Müller macht folgende Beobachtungen:

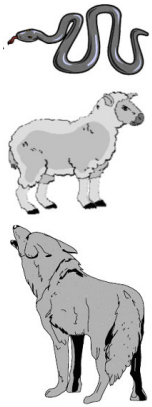
1. Vom Augenblick, in dem die Lok auf die Brücke fährt, bis zu dem Augenblick, in dem sie die Brücke verlassen hat, vergehen 32 Sekunden.
2. Der letzte Wagen verlässt die Brücke 25 Sekunden nachdem die Lok von der Brücke gefahren ist.

3. Die Wagen haben zusammen 120 Achsen. Herr Müller weiß:
4. Jeder Wagen hat vier Achsen und ist 15 m lang.
5. Die Lok ist 25 m lang.

Fragen:

a. Wie lang ist der Zug?
b. Wie lang ist die Brücke?

Aufgabe 2 (Grausame Tierwelt)



In einem blühenden Tal leben Wölfe, Schafe und Schlangen.

Jeden Morgen um 8 Uhr reißt jeder Wolf genau zwei Schafe. Jeden Mittag um 12 Uhr zertritt jedes Schaf genau zwei Schlangen, die faul in der Sonne liegen, und jeden Abend um 18 Uhr versetzt jede Schlange genau zwei Wölfen ihren tödlichen Biss.

Am Morgen des 6. Tages um sechs Uhr lebt schließlich nur noch ein einsamer Wolf an diesem paradiesischen Fleckchen Erde. Wie viele Tiere von jeder Art lebten in dem Tal am 1. Tag um 6 Uhr morgens?

Anmerkung: Wir gehen davon aus, dass jeder Wolf die tägliche Schaf-Ration zum Überleben braucht. Ebenso benötigt jedes Schaf unbedingt zwei Schlangen zum Zertreten und jede Schlange dringend zwei Wölfe zum Beißen. (Sonst wäre das Rätsel ja langweilig!)

3.13.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Spiegelsumme)

Denke Dir eine zweistellige Zahl zwischen 00 und 99 (hier sind auch einstellige Zahlen erlaubt, die 8 wird dann als 08 geschrieben; auch die 0, geschrieben als 00, ist erlaubt). Zu dieser zweistelligen Zahl kann man die Spiegelsumme bilden, indem man zu dieser Zahl die Zahl addiert, bei der die beiden Ziffern vertauscht sind.

Zwei Beispiele: Unsere zweistellige Zahl sei 85. Die gespiegelte Zahl ist dann 58 und die Spiegelsumme beträgt 143, weil 85 + 58 = 143 ist. Das Ergebnis kann also auch dreistellig sein. Nehmen wir die 07, so lautet die gespiegelte Zahl 70, und die Spiegelsumme lautet dann 77.

a. Bestimme die Spiegelsummen von 13 und von 37!
b. Denke Dir eigene zweistellige Zahlen aus und berechne deren Spiegelsummen. Es gibt eine wichtige Eigenschaft, die alle Ergebnisse der Spiegelsummenberechnung gemeinsam haben. Finde sie und begründe diese Eigenschaft!
c. Welche zweistellige Zahlen haben eine Spiegelsumme, die kleiner als 45 ist?
d. Wenn Du alle zweistelligen Zahlen, also von 00 bis 99, nimmst und deren Spiegelsumme berechnest, welche Zahl kommt als häufigstes Ergebnis heraus? Erkläre dann, warum diese Zahl am häufigsten herauskommt!
e. Berechne die Summe aller Spiegelsummen der Zahlen von 00 bis 99!

Aufgabe 2 (Schnittpunkte)

Legt man zwei Quadrate und einen Kreis übereinander, so bilden die Begrenzungslinien, je nach Lage, unterschiedlich viele Schnittpunkte. (Im Beispiel der Abbildung 3.37 sind es insgesamt 6 Schnittpunkte.)

a. Wie muss man die drei Figuren legen, damit möglichst viele Schnittpunkte entstehen? (Die Größe der einzelnen Figuren darf

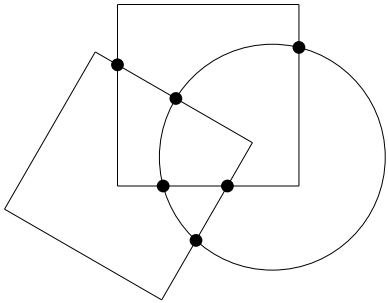


Abbildung 3.37: Ratsgymnasium 2008, Klasse 5 – 6, Aufg. 2

dabei verändert werden.) Fertige eine saubere Zeichnung deiner Lösung an und kennzeichne und zähle die Schnittpunkte!

b. Warum bist Du Dir sicher, dass mehr Schnittpunkte nicht möglich sind?

Aufgabe 3 (ABCD)

a. Die vier ersten Großbuchstaben des Alphabetes, A, B, C und D, sollen hintereinander geschrieben werden, ohne dass ein Buchstabe doppelt vorkommt oder einer fehlt. So ergeben sich Buchstabenfolgen wie etwa ABCD oder BCDA oder DCAB. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen sind möglich? Schreibe alle mögliche Folgen (auch die eben genannten) auf!

b. Nun werden die Buchstaben A, B, C und D nebeneinander auf 4 miteinander verbundene Quadrate geschrieben. Auf der Rückseite stehen jeweils die gleichen Buchstaben. Einen solchen Buchstabenstreifen erhaltet ihr zusätzlich zu diesem Aufgabenzettel. Dieser Streifen soll an den gestrichelten Linien gefaltet werden, so dass alle vier Buchstaben übereinander liegen. Dann werden die vier Buchstaben von oben nach unten gelesen und als Buchstabenfolge notiert. (s. Abb.). Nicht alle Buchstabenfolgen aus Auf-

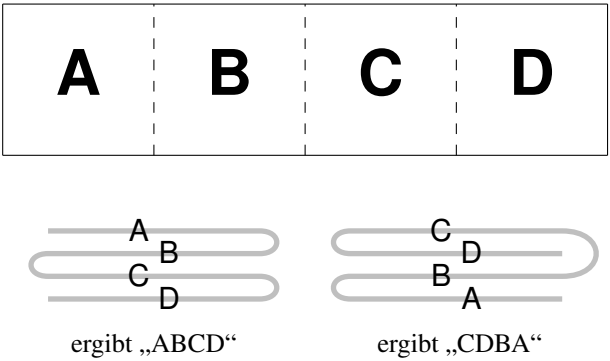


Abbildung 3.38: Ratsgymnasium 2008, Klasse 5 – 6, Aufg. 3

gabenteil a) lassen sich mit dem Streifen falten! Finde möglichst viele dieser Buchstabenfolgen, die sich **nicht** falten lassen!

c. Wenn der Streifen an seinen beiden Längsenden (also bei den Buchstaben A und D) zusätzlich zusammengeklebt wird, ergibt sich ein ringförmiger Papierstreifen. Nun sind noch mehr Reihenfolgen von denen aus Aufgabenteil a) nicht möglich. Nenne auch diese!

3.14 Ursulaschule Osnabrück 2009

3.14.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Holzwürfel, mehrfarbig)

Lehrer Müller erzählt aus seinem Privatleben:

„Vor ein paar Wochen fand ich beim Aufräumen des Dachbodens einen großen Holzwürfel. Er war weiß lackiert und hatte einige Jahre in unserem Wohnzimmer als Blumenhocker gedient. An manchen Stellen sah man noch an dunklen Ringen, wo die Blumentöpfe gestanden hatten. Ich wollte den Würfel zuerst wegwerfen, aber dann überlegte ich mir, dass sich daraus ganz gut Bauklötze für meine kleine Tochter Sarah machen ließen.

Also bat ich meinen Nachbarn Alfred, der eine Kreissäge besitzt, den Blumenhocker in 64 gleich große Würfel zu zerschneiden. Leider hatte ich vergessen, vorher die Farbe von dem Würfel zu schleifen, denn nun hatten manche der Bauklötze einige weiße Seitenflächen.

Zuerst ärgerte ich mich darüber und nahm mir vor, den Lack nachträglich zu entfernen, aber als ich merkte, dass Sarah die Bauklötze gar nicht beachtete und nur mit ihren Puppen spielte, ließ ich es bleiben.

Am letzten Mittwoch sah ich mir nach dem Abendbrot die Nachrichten im Fernsehen an. Sarah und Thomas lagen schon im Bett und Christina spielte gedankenverloren mit einem von Sarahs Holzwürfeln, als meine Frau aus der Küche rief: ‚Kann mir jemand von euch beiden beim Abwasch helfen?‘

‚Du oder ich?‘, fragte ich meine Tochter. ‚Du!‘, entschied sie energisch. ‚Ich habe den ganzen Nachmittag über Hausaufgaben gemacht und bin müde.‘ ‚Mir geht es nicht anders. Ich habe auch den ganzen Tag gearbeitet‘, erwiderte ich. ‚Dann schlage ich vor, wir würfeln es aus. Das ist am gerechtesten‘, meinte Christina. Sie stellte den Beutel mit den 64 Holzwürfeln vor mir auf den Tisch und sagte: ‚Du nimmst jetzt, ohne in den Beutel zu sehen, einen Würfel heraus und gibst ihn mir. Ich werde dann damit würfeln. Ist anschließend die oben liegende Fläche des Würfels weiß, so wasche ich ab, sonst gehst du in die Küche.

Einverstanden?‘

Ich hielt dies für einen fairen Vorschlag. Wir spielten das Spiel - und ich verlor. Beim Abtrocknen kamen mir dann Zweifel. Aus Erfahrung wusste ich, dass mich meine Tochter für geistig etwas unterbelichtet hält und nicht die geringsten Hemmungen hat, mich mit solchen Spielchen über den Tisch zu ziehen.“

Beurteilt durch eine Rechnung, ob Herr Müller wirklich die gleichen Chancen gehabt hat wie Christina.

Aufgabe 2 (Dreieck im Quadrat)

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm und drei beliebige Punkte X, Y und Z auf dem Rand des Quadrates.

Beweist, dass jedes Dreieck mit den Ecken X, Y und Z einen Flächeninhalt hat, der höchstens 8 cm^2 beträgt!

Aufgabe 3 (Sechsstellige Zahlen)

Unter den sechsstelligen natürlichen Zahlen wollen wir zwei besondere Typen hervorheben:

Typ I hat die Gestalt $x = ababab > 0$ (z.B. $x = 686868$) und Typ II hat die Gestalt $y = cdecde > 0$ (z.B. $y = 142142$). Dabei stehen a, b, c, d, e für die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ($a \geq 1$ und $c \geq 1$, weil die Zahlen ansonsten nicht sechsstellig wären).

Wenn ihr irgendeine beliebige Zahl x des Typs I durch irgendeine beliebige Zahl des Typs II dividiert, werdet ihr feststellen, dass dieser Bruch in jedem Fall gekürzt werden kann.

a. Zeigt, dass x (vom Typ I) und y (vom Typ II) in jedem Fall einen größten gemeinsamen Teiler $t > 1$ besitzen. Wie groß ist t mindestens?
b. Welche spezielle Gestalt müssen x (vom Typ I) und y (vom Typ II) haben, damit bei der Division x/y kein Rest bleibt? Beweist eure Aussagen!

Aufgabe 4 (Die zerbrochene Fensterscheibe)

In der Pause waren 14 Schüler in der Klasse geblieben. In dieser Zeit wurde dort eine Fensterscheibe zerbrochen, und zwar von genau einem dieser Schüler. Alle 14 Schüler wurden befragt, der Lehrer protokollierte die Aussagen:

Nadine:	„Ein Junge hat die Scheibe zerbrochen.“
Hanna:	„Ich war es nicht, Jan hat es getan!“
Jan:	„Ja, ich habe die Scheibe zerbrochen.“
Günther:	„Er lügt, Frank hat das gemacht.“
Anja:	„Nein, das stimmt nicht, aber ich war es auch nicht.“
Eva:	„Das war entweder Corinna oder Hanna, aber ich nicht.“
Frank:	„Eins von den Mädchen hat die Scheibe zerbrochen.“
Sonja:	„Hanna und ich waren es.“
Irene:	„Ich habe gesehen, wie einer der Jungen die Scheibe zerbrochen hat, aber ich weiß nicht mehr, wer.“
Karl:	„Jan sagt nicht die Wahrheit, ich habe die Scheibe zerbrochen.“
Lutz:	„Das stimmt, Karl hat die Wahrheit gesagt.“
Corinna:	„Ich habe nicht mitgemacht, Hanna war es allein.“
Manuela:	„Lutz lügt, das Fenster ist von allein durch den Luftzug zerbrochen.“
Renate:	„Hanna hat es getan.“

Alle haben gelogen, nur einer hat die Wahrheit gesagt. Begründet eure Antworten auf die folgenden Fragen:

- Wer hat die Scheibe zerbrochen?
- Wer hat als einziger die Wahrheit gesagt?

Prüft euer Ergebnis für jede Schülerantwort nach!

3.14.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Fußball)

Ein Fußball besteht aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken. Denkt euch die Fünf- und Sechsecke als ebene Flächen.

a. Wie viele Ecken und Kanten hat der Fußball?
b. Wie viele Flächendiagonalen hat dieser Körper? Wie viele Raumdiagonalen besitzt er?

(Hinweis: Flächendiagonalen sind Diagonalen, die auf der Oberfläche verlaufen. Raumdiagonalen sind Diagonalen, die ganz im Inneren des Fußballs verlaufen.)

Aufgabe 2 (Gartenbeete)

(S. Abb. 3.39) Else zu Kurt: „Die Kartoffeln sollen an mindestens zwei kleinere Beete grenzen. Der Kohl soll weiter südlich gepflanzt werden als die Erbsen. Die Bohnen hätte ich gern sowohl nördlich als auch westlich der Möhren. Den Lauch möchte ich direkt neben den Radieschen finden, während der Kohl an genau drei andere Beete grenzen soll. Die Petersilie bekommt eines der kleinsten Beete. Kartoffelbeet und Tomatenbeet sollen dieselbe Größe haben. Bohnen und Lauch sollen nur von genau einem der beiden Gartenwege aus erreichbar sein.“ Wo muss Kurt was pflanzen?

3.14.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Altersrätsel)

Frau und Herr Depuhl haben die drei Kinder Agnes, Bernd und Christian.

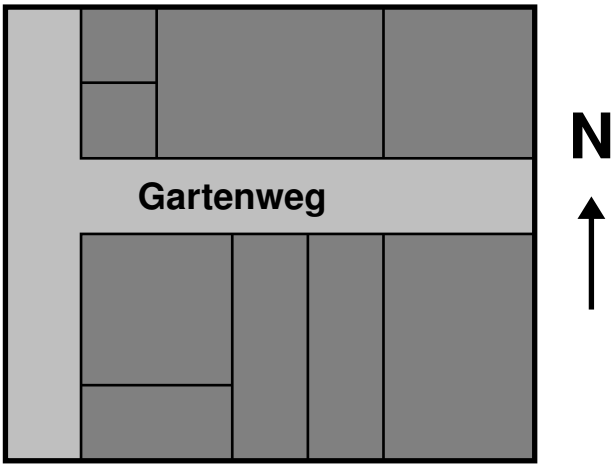


Abbildung 3.39:
Ursulaschule 2009, Klasse 7 - 10, Mündl. Teil, Aufg. 2

Frau Depuhl:	„Mein Mann ist zwei Jahre älter als ich.“
Christian:	„Mein kleiner Bruder Bernd ist zwei Jahre jünger als ich.“
Agnes:	„Ich bin drei Jahre älter als Christian.“
Christian:	„Außerdem ist meine große Schwester so alt wie Bernd und ich zusammen.“
Herr Depuhl:	„In drei Jahren bin ich viermal so alt wie Agnes dann sein wird.“

In wie vielen Jahren feiert Frau Depuhl ihren fünfzigsten Geburtstag?

Aufgabe 2 (Zahlenrätsel)

Dorothea sagt:
„Meine Zahl liegt zwischen 100 und 200.
Sie ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar.
Außerdem ist sie durch 2 und 5, aber nicht durch 4 teilbar.“

Wie heißt Dorotheas Zahl?

Ernst sagt:
„Meine Zahl ist eine zweistellige Primzahl und hat als Ziffern ebenfalls Primzahlen.
Wenn ich die Ziffern vertausche, ist die neue Zahl wieder eine Primzahl, die aber größer als meine Zahl ist.“
Wie heißt die Zahl von Ernst?

Fanny sagt:
„Meine Zahl ist ebenfalls eine zweistellige Primzahl.
Wenn ich das Fünffache der Einerziffer und das Vierfache der Zehnerziffer addiere, erhalte ich wieder meine Zahl.“
Welche Zahl meint Fanny?

Aufgabe 3 (Achteckzerlegungen)

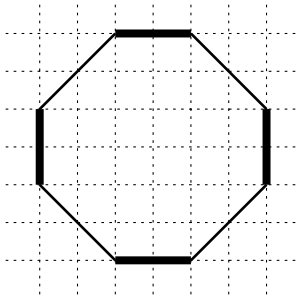


Abbildung 3.40: Ursulaschule 2009, Klasse 5 – 6, Aufg. 3

Die Abbildung 3.14.2 zeigt ein symmetrisches Achteck.

1. Zerlege dieses Achteck durch eine Gerade in zwei kongruente (d.h. deckungsgleiche) Fünfecke.

2. Zerlege dieses Achteck durch zwei Geraden in vier kongruente Fünfecke.
3. Zerlege dieses Achteck durch vier Geraden in acht kongruente Vierecke.
4. Gerd möchte für die Aufgabenteile 1 und 3 je ein ähnliches Achteck zeichnen, sodass in beiden Fällen die Teilflächen die gleiche Flächengröße haben – und zwar jeweils $31,5\,\text{cm}^2$. Wie lang muss er dann für die beiden Achtecke jeweils die dick markierten Strecken zeichnen?
   Bestimme für die beiden Fälle jeweils die Länge der Strecke!

3.15 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 2010

3.15.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Natürliche Zahlen gesucht)

Es werden zwei natürliche Zahlen x und y gesucht, und zwar sollen sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

a. Die Summe von x und y beträgt 324.
b. Der größte gemeinsame Teiler von x und y ist 36.
c. Die Zahl x ist größer als die Zahl y, aber nicht größer als das Doppelte von y.

Ermittle alle Zahlenpaare, die die Eigenschaften a., b. und c. gleichzeitig erfüllen.

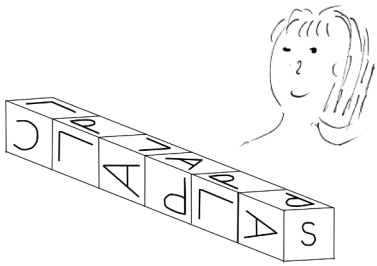


Abbildung 3.41:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Aufgabe 2 (Ansichtssache)

Vor Elvira liegen sechs identische Würfel in einer Reihe auf dem Tisch (siehe Abb. 3.41). Zeichne die Rückseite der sechs abgebildeten Würfel, so wie Elvira sie sieht.

Aufgabe 3 (Dreieck aus Dreieck)

A' ist der Spiegelpunkt von A bei Punktspiegelung an B, genauso sind B' und C' entstanden. Wie oft ist nun die Fläche des Dreiecks ABC in der größeren Fläche des Dreiecks $A'B'C'$ enthalten?

Begründe deine Antwort!

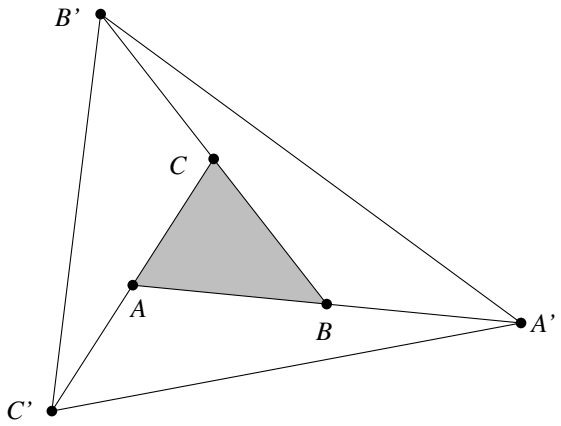


Abbildung 3.42:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3

Aufgabe 4 (Versenkt)

Ein quaderförmiges Aquarium ist mit Wasser gefüllt. Die inneren Abmessungen der Grundfläche, in Zentimetern gemessen, sind natürliche Zahlen.

Jeanette stellt einen Würfel der Kantenlänge 10 cm auf den Boden des Aquariums. Die Höhe des Wasserspiegels ist nun gleich der Höhe des Würfels.

Sie ersetzt dann den Würfel durch einen anderen Würfel der Kantenlänge 20 cm, sie stellt nunmehr diesen Würfel auf den Boden des

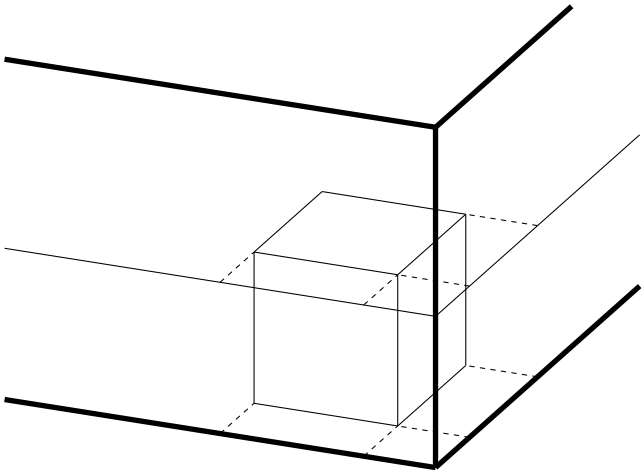


Abbildung 3.43:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4

Aquariums. Und auch jetzt ist die Höhe des Wasserspiegels gleich der Höhe des Würfels.

Welche Abmessungen hat die Grundfläche des Aquariums, und wie viele Liter Wasser befinden sich darin?

3.15.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Wettkampfeinlauf)

Beim Schulsportfest nahmen Christina (C), Barbara (B), Dorothee (D) und Alexandra (A) an dem Endlauf über $50m$ teil. Auf Grund der vorher gelaufenen Zeiten konnte man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge $CBAD$ rechnen.

Damit hatte man aber sowohl die Plätze sämtlicher einzelnen Läufer als auch die Paare aller direkt aufeinander folgenden Läufer falsch

vermutet.

Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge $ADBC$, und tatsächlich kamen genau zwei Läufer auf den von ihm erwarteten Plätzen ins Ziel.

In welcher Reihenfolge erreichten die Läufer das Ziel?

Aufgabe 2 (Die Admin-Passwörter zur GSG-Homepage)

Die fünf Administratoren der GSG-Homepage hatten nach Eingabe eines Passworts die Berechtigung, die Struktur der GSG-Homepage zu ändern.

Leider ist es immer wieder vorgekommen, dass ein Administrator eigenmächtig solche Änderungen vorgenommen hat. Deshalb beschließt die Redaktionsgruppe, die Eingabe mehrerer Passwörter zu verlangen, bevor die Berechtigung freigegeben wird, die Struktur der GSG-Homepage zu ändern. Es werden also so viele Passwortabfragen mit jeweils eigenem Passwort auf der Login-Seite eingerichtet, und jedem Administrator so viele der Passwörter bekanntgegeben, dass nur bei Anwesenheit von mindestens drei der fünf Administratoren alle Passwortabfragen beantwortet werden können.

Wie viele Passwortabfragen müssen dazu auf der Login-Seite eingerichtet werden, und wie müssen die Passwörter zu den Passwortabfragen an die Administratoren verteilt werden?

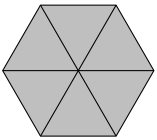
3.15.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Sechsecke im Sechseck)

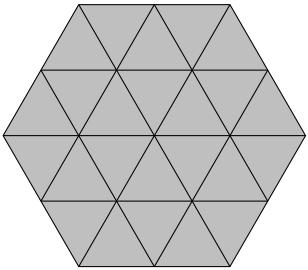
Die abgebildeten sechseckigen Figuren bestehen aus kleinen gleichseitigen Dreiecken. Figur A besteht aus sechs solcher kleinen Dreiecke.

Die Anzahl der an einer Sechseckseite nebeneinander liegenden Dreiecke wird hier die Seitenlänge des Sechsecks genannt. Figur A zeigt also ein Sechseck der Seitenlänge eins, Figur B ein Sechseck der Seitenlänge zwei, Figur C ein Sechseck der Seitenlänge drei.

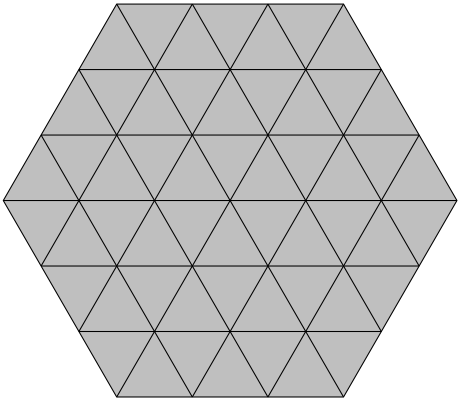
a. Aus wie vielen der kleinen gleichseitigen Dreiecke besteht Figur C?



Figur A: Seitenlänge 1



Figur B: Seitenlänge 2



Figur C: Seitenlänge 3

Abbildung 3.44:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 5 – 6, Aufg. 1

b. In Figur B kommen außer dem großen Sechseck noch sieben kleinere Sechsecke der Seitenlänge eins vor. Wie viele dieser Sechsecke der Seitenlänge eins kommen in Figur C vor?

c. Wie viele Sechsecke sind insgesamt in Figur C enthalten?

d. Wie viele Sechsecke welcher Größe gibt es in einem Sechseck mit der Seitenlänge 7? Aus wie vielen kleinen Dreiecken (siehe Aufgabenteil a.) besteht das Sechseck mit der Seitenlänge 7?

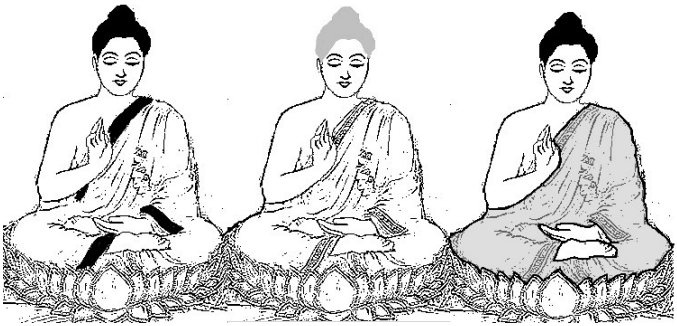


Abbildung 3.45:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 5 – 6, Aufg. 2

Aufgabe 2 (Drei indische Götter)

In einem indischen Tempel standen einst drei Götterstatuen nebeneinander, die sprechen konnten.

Eine der Statuen stellte den Gott der Lüge dar, der grundsätzlich log, eine andere den Gott der Wahrheit, der immer die Wahrheit sagte, und die dritte den Gott der Diplomatie, von dem man nie wusste, wann er die Wahrheit sagte und wann er log.

Lange Zeit hat niemand gewusst, welches Standbild welchen Gott darstellte.

Bis eines Tages ein Fünftklässler kam und die linke Statue fragte: „Wer steht neben dir?“ und zur Antwort erhielt: „Der Gott der Wahrheit.“ Die Frage an das mittlere Standbild: „Wer bist du?“ brachte ihm die Antwort: „Der Gott der Diplomatie.“ Auf die Frage „Und wer steht

neben dir?“ antwortete die dritte Statue: „Der Gott der Lüge.“ Und da war alles klar.

Welcher der drei Statuen stellte welchen Gott dar?

Aufgabe 3 (Oster-Kaninchen im Zoo)

Von den speziellen Oster-Kaninchen ist bekannt, dass jedes Paar Alttiere immer nach einer Woche ein Paar Jungtiere zur Welt bringt. Ein Jungtierpaar bringt in der ersten Woche nach seiner Geburt noch keine Jungen zur Welt, ist aber nach dieser zu einem Alttierpaar herangewachsen.

a. Zu Beginn der ersten Woche werden 4 Paare Alttiere und 6 Paare gerade geborener Jungtiere in den Zoo gebracht. Wie viele Alttierpaare und Jungtierpaare gibt es am Ende der ersten, der zweiten und der dritten Woche?

b. In einem anderen Zoo sollen nun zu Ostern 105 Kaninchen ausgestellt werden, es sind aber nur noch 5 Wochen Zeit, in der sich die Kaninchen so vermehren müssen, dass diese Anzahl erreicht wird.
Zu Beginn der ersten Woche werden somit eine gewisse Anzahl an Alttierpaaren und eine gewisse Anzahl an gerade geborenen Jungtierpaaren in den Zoo gebracht, so dass am Ende der fünften Woche tatsächlich 105 Kaninchenpaare im Zoo umherhoppeln. Wie viele Alttierpaare und wie viele Jungtierpaare wurden zu Beginn der ersten Woche in den Zoo gebracht?

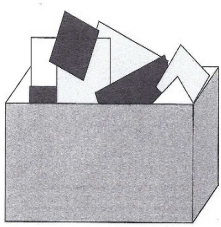
3.16 Gymnasium Melle 2011

3.16.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Holzquadrate)

In einer Spielkiste befinden sich kleine und große Holzquadrate. 30% aller Quadrate sind klein. Ein Viertel aller Quadrate ist blau. Von den kleinen Quadraten sind 80% blau.

Welcher Anteil der großen Quadrate ist blau?



Aufgabe 2 (Drei Töchter)

Nachdem die Kandidatin bei dem Quiz „*Denk mal!*“ die 500 Euro gewonnen hat, kommt sie mit dem Moderator der Sendung ins Gespräch.

Beide stellen fest, dass sie die gleiche Anzahl Töchter haben, nämlich drei. Der Moderator fragt nach: “Wie alt sind Ihre drei Mädchen?“ Die Kandidatin gibt die Antwort – der Quizshow gemäß – verschlüsselt:

- Kandidatin: „Wenn man die drei Zahlen miteinander multipliziert, ist das Ergebnis 36.“
- Moderator: „Diese Information reicht nicht aus.“ Kandidatin: „Wenn man die drei Zahlen addiert, erhält man die Nummer dieses Studios.“
- Moderator: „Das reicht immer noch nicht!“
- Kandidatin: „Stimmt! Meine älteste Tochter spielt Querflöte!“
- Moderator: „OK, jetzt weiß ich Bescheid!“

Finde heraus, wie alt die drei Töchter der Kandidatin sind und begründe es.

Aufgabe 3 (Teilbar durch 5?)

Untersuche, ob der Wert der folgenden Summe durch 5 teilbar ist und begründe!

$$3^{4444} + 4^{3333}$$

Aufgabe 4 (Dreieckskonstruktion)

Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\alpha = 25^\circ,\ c = 7\text{cm und } b - a = 2\text{cm}.$$

a. Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!
b. Untersuche, ob die Konstruktion eindeutig ist!

3.16.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Blindenschrift und ihre Codierung)

Der Blindenlehrer *Louis Braille* (1809 – 1852), selbst schon mit drei Jahren erblindet, entwickelte die noch heute gebräuchliche Blindenschrift.

Jeder Buchstabe, jedes Zeichen besteht aus sechs Punkten. Die dicken Punkte sind hervorgehoben und können somit ertastet werden (siehe Abb. 3.46).

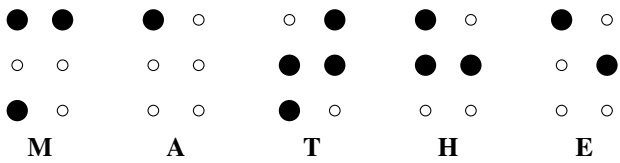


Abbildung 3.46:
Gymnasium Melle 2011, Klasse 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 1

a. Wie viele verschiedene Symbole sind mit dieser Methode möglich? Erläutere!
b. Reicht diese Schrift-Codierung zum Lesen deutscher Texte aus? Begründe nachvollziehbar!

Aufgabe 2 (Was sind das für Zahlen?)

Mathe-Max hat die natürlichen Zahlen wie folgt angeordnet:

1								
2	3	4						
5	6	7	8	9				
10	11	12	13	14	15	16		
17	18	19	20	21	22	23	24	25
...								
n								
...								

Sein Freund Mathe-Moritz sieht ihm zu und betrachtet die Zahlen. „Merkwürdig, wie machst du das?“ fragt er Mathe-Max. „Ganz einfach“, antwortet dieser. „Das kannst du auch.“

a. Betrachte zunächst die letzte Zahl in den Zeilen und erkläre, um welche besonderen Zahlen es sich hierbei handelt! Nun führe eine entsprechende Überlegung für die jeweils erste Zahl in den Zeilen durch. Untersuche, welche Form die erste Zahl der n –ten Zeile besitzt.
b. Erkläre dann, wie man die mittlere Zahl einer beliebigen (n-ten) Zeile berechnet!
c. Gib an, welche Zahl in der 100. Zeile und der 100. Spalte steht! Erläutere, wie du die Zahl gefunden hast!
d. Finde heraus, in welcher Zeile und Spalte die Zahl 2011 steht! Erläutere deine Vorgehensweise

3.16.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Beinezahl)

Peter erwacht, als er ein großes Gepolter aus der Küche hört. Er hastet zur Küche und sieht, wie seine Schwester Ina hinter Hund Struppi her rennt, der wiederum ihren 4 Katzen nachjagt, die jeweils 3 junge Katzen dabei haben. Die Jungen sind wiederum hinter 4 Mäusepärchen her, die mit je 6 jungen Mäuschen um ihr Leben rennen.

Berechne, wie viele Beine in der Küche insgesamt in Bewegung sind (einschl. Peter).

Aufgabe 2 (Holzleiter)

Eine Holzleiter soll vom unteren bis zum oberen Ende 2,40 m lang sein. Die Leitersprossen haben einen Abstand von 30 cm.

a. Gib zunächst eine sinnvolle Anzahl von Sprossen an und begründe die Anzahl.
b. Die Leiter soll, wenn man von Außenkante zu Außenkante misst, 45 cm breit sein. Die Sprossen schließen außen bündig mit den Leiterhölzern ab (also kein Überstand). Bestimme, wieviel Meter Holzlatten man mindestens zum Bau der Leiter benötigt.

Aufgabe 3 (Seitenzahlen)

Das Buch „*Meyers Jugend-Lexikon von A bis Z*“ ist ein umfangreiches Werk geworden. Der Verlag teilte mit, dass allein für das Drucken der Seitenzahlen genau 6937 Ziffern notwendig waren.

Überlege nun, wie viele Seiten das gesamte Buch hat!

3.17 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2012

3.17.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Hellseher)

Ein Zauberer kann das ihm unbekannte Alter eines Menschen zwischen 10 und 99 Jahren gerundet auf Jahre sowie den ihm unbekannten zweistelligen Inhalt des Geldbeutels dieses Menschen gerundet auf Euro hellsehen.

Der Zauberer fordert den Menschen auf, im Kopf sein Alter mit 2 zu multiplizieren, zum Produkt 5 zu addieren und die Summe mit 50 zu multiplizieren. Danach soll der Mensch den Inhalt seines Geldbeutels zählen, ohne dass der Zauberer es sehen kann. Diese Zahl soll der Mensch im Kopf zu dem letzten Ergebnis addieren. Von dieser Summe soll er nun noch die Zahl der Tage im Jahr, also 365, subtrahieren. Diese Differenz nennt der Mensch dem Zauberer. Der Zauberer muss zu der ihm genannten Zahl 115 addieren und kennt dann das Alter des Menschen und den Eurobetrag in dessen Geldbeutel.

a. Schreibe den Ablauf des Zaubertricks für einen 35 Jahre alten Menschen mit 56 Euro im Geldbeutel auf!
b. Erkläre die Funktionsweise des Zaubertricks!
c. Verändere den Zaubertrick so, dass der Zauberer am Ende zusätzlich noch das zweistellige Gewicht des Menschen gerundet auf Kilogramm hellsehen kann!

Aufgabe 2 (Sechseck-Möndchen)

Über den Seiten eines regelmäßigen Sechsecks werden Halbkreise gezeichnet, dazu der Umkreis des Sechsecks mit dem Radius r. Die Fläche der Mondsicheln wird rot eingefärbt, das Sechseck wird blau eingefärbt.

Ermittle, für welche Fläche mehr Farbe benötigt wird!

Aufgabe 3 (Bruch und Kehrwert)

a. Zeige, dass die Summe eines Bruches a/b (mit $a > 0$ und $b > 0$) und seines Kehrwertes immer mindestens 2 beträgt!
b. Bestimme alle Fälle, in denen die Summe genau 2 ist!

Aufgabe 4 (Logical Schulfächer)

In einer Schule werden die Fächer Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Deutsch und Geschichte von den Lehrern Arnold, Brendel und Clausner erteilt. Jeder der Lehrer unterrichtet genau zwei Fächer. Der Chemielehrer wohnt in dem selben Haus wie der Mathematiklehrer. Herr Arnold ist von den drei Lehrern der jüngste. Der Mathematiklehrer und Herr Clausner spielen häufig Schach gegeneinander. Der Physiklehrer ist älter als der Biologielehrer, aber jünger als Herr Brendel. Der älteste der drei Lehrer hat einen längeren Heimweg als seine beiden Kollegen.

Bestimme die Unterrichtsfächer von Herrn Arnold!

3.17.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (ANNA-Zahlen)

ANNA-Zahlen (Zahlenpalindrome) sind Zahlen, die vorwärts und rückwärts gelesen dieselbe Zahl ergeben, so wie auch der Name ANNA vorwärts und rückwärts gelesen gleich bleibt, übrigens ebenso wie OTTO (wegen der Gleichberechtigung). Ein Beispiel für eine ANNA-Zahl ist 2112.

a. Schreibe alle zweistelligen ANNA-Zahlen auf!
b. Ermittle, wie viele dreistellige und wie viele vierstellige ANNA-Zahlen es gibt!
c. Gib eine Formel dafür an,wie viele n-stellige ANNA-Zahlen es gibt!
d. Bestimme einen gemeinsamen Teiler ungleich 1 aller vierstelligen ANNA-Zahlen!

e. Beweise, dass alle vierstelligen ANNA-Zahlen diesen Teiler besitzen!

Aufgabe 2 (Schulwettkampf)

Bei einem Schulwettkampf treten die Fußballmannschaften von n verschiedenen Schulen jeweils gegeneinander an. Dabei können mehrere Partien verschiedener Mannschaften gleichzeitig durchgeführt werden. Jedes Team muss gegen jedes andere antreten, und es wird eine Hin- und eine Rückrunde ausgetragen. Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage 0 Punkte.

a. Ermittle, wie viele Partien bei $n = 6$ teilnehmenden Schulteams ausgetragen werden müssen!
b. Stelle eine Formel für die Anzahl der Partien bei n teilnehmenden Schulteams auf!
c. Bestimme die Punktzahl, die ein Team braucht, damit es den Schulwettkampf bei n teilnehmenden Schulteams in jedem Fall gewinnt!
d. Bestimme jeweils die Anzahl der Starttermine, die man benötigt, um alle Partien bei 6 bzw. bei 7 teilnehmenden Schulteams durchführen zu können!
e. Stelle eine Formel auf für die Anzahl der Starttermine bei n teilnehmenden Schulteams!

3.17.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Schokoladenbonbons)

Frau Meier erwartet am Nachmittag Besuch von ihren beiden Freundinnen. Sie stellt also mittags eine Schale mit Schokoladenbonbons auf den Wohnzimmertisch. Als ihre jüngste Tochter Melanie aus der Schule kommt und die Bonbons sieht, isst sie heimlich ein Sechstel davon. Kurz darauf kommt Frau Meiers zweitjüngste Tochter Sarah nach Hause, sieht die Bonbons und isst zwei Fünftel davon. Die älteste Tochter

Angelika kommt als letzte aus der Schule und nimmt sich heimlich ein Drittel der Bonbons.

Als Frau Meier am Nachmittag mit ihren beiden Freundinnen das Wohnzimmer betritt, meint eine der Freundinnen: Na, heute hast Du aber Deinen sparsamen Tag, nicht einmal drei Bonbons für jeden von uns!?

Berechne und begründe, wie viele Bonbons ursprünglich in der Schale lagen!

Aufgabe 2 (Ernst und Moritz)

Ernst und Moritz sind immer unterwegs. Gerade vergnügen sie sich bei einer Bootspartie auf der Hase. Drei Wanderer wollen den Fluss überqueren, aber weit und breit ist keine Brücke zu sehen. Ratlos stehen die drei Wanderer am Ufer, als Ernst und Moritz ihnen ihre Hilfe anbieten. Die Sache hat jedoch einen Haken. Das Boot ist so winzig, dass entweder nur die beiden Jungen oder ein erwachsener Wanderer hinein passen.

a. Erkläre, wie Ernst und Moritz die drei Wanderer trockenen Fußes über die Hase bringen können!
b. Nach dieser großen Anstrengung sehen Ernst und Moritz nur noch Sterne vor ihren Augen, genauer gesagt die Abbildung 3.47 auf Seite 109. Bestimme die Anzahl der Quadrate, die man bilden kann, wenn immer vier Sterne die Ecken eines Quadrates bilden sollen!

Aufgabe 3 (Ballkreis)

10 Schüler stehen im Kreis und werfen sich einen Ball im Uhrzeigersinn so zu, dass immer zwei Schüler übersprungen werden, also der 1. Schüler zum 4. Schüler wirft und so weiter.

a. Begründe, ob alle Schüler in das Spiel einbezogen werden!
b. Ermittle, wie oft der Kreis umrundet werden muss, bis der Ball wieder beim 1. Schüler landet!

c. Bestimme alle möglichen Anzahlen von Schülern, die übersprungen werden müssen, damit nicht alle Schüler in das Spiel einbezogen werden!
d. Gib für die Anzahl der zu überspringenden Schüler eine allgemeine Regel an, so dass alle 10 Schüler in das Spiel einbezogen werden!

```
        *   *
        *   *
*   *   *   *   *   *
*   *   *   *   *   *
        *   *
        *   *
```

Abbildung 3.47:
Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium 2012, Klassen 5 und 6, Aufg. 2

3.18 Artland-Gymnasium Quakenbrück 2013

3.18.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

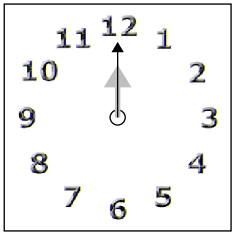
Aufgabe 1 (Würfelflächen)

Ein Würfel der Kantenlänge 3 ist aus $3 \times 3 \times 3$ Würfeln der Kantenlänge 1 zusammengesetzt. Die nach außen zeigenden Flächen der kleinen Würfel sind hellgrau. Die innen liegenden Flächen sind schwarz.

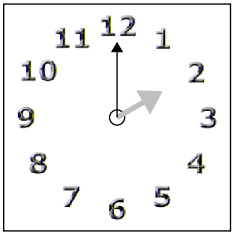
a. Wie viele der kleinen Würfel haben 3 hellgraue Flächen? Wie viele haben zwei, eine bzw. gar keine hellgraue Fläche?
b. Löse die Aufgabe für einen $4 \times 4 \times 4$-Würfel.
c. Löse die Aufgabe allgemein für einen $n \times n \times n$-Würfel.

Aufgabe 2 (Überlegungen zur Uhr)

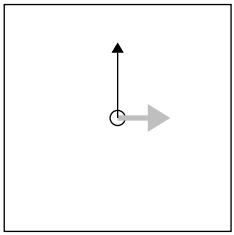
a. Es ist Donnerstag, der 04.04.2013, 12.00 Uhr mittags. Der Minuten- und der Stundenzeiger der Uhr stehen direkt übereinander. Bestimme begründet wie oft diese Zeiger der Uhr danach in den nächsten 24 Stunden wieder übereinander stehen. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass sich die Zeiger nicht in kleinen Sprüngen, sondern kontinuierlich bewegen.
b. Es ist Donnerstag, der 04.04.2013, 14.00 Uhr nachmittags. Bestimme auf die Sekunde genau, zu welchem Zeitpunkt der Minuten- und der Stundenzeiger das nächste Mal übereinander stehen.
c. Es ist Donnerstag, der 04.04.2013, 15.00 Uhr nachmittags. Wir entfernen das Zifferblatt unserer Uhr und drehen sie um 90°.



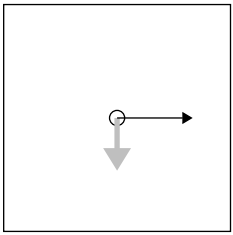
zu Aufg. 2)a



zu Aufg. 2)b



Originaluhr



um 90° gedrehte Uhr

zu Aufg. 2)c

Abbildung 3.48:
Artland-Gymnasium 2013, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Durch die Drehung ist die angezeigte Uhrzeit nicht nur falsch, sondern auch sinnlos, denn die Stellung von Minuten- und Stundenzeiger zueinander kann es so normalerweise nicht geben. Eine quadratische Uhr kann man offensichtlich nicht auf jede ihrer vier Seiten stellen, ohne dass es zu sinnlosen Zeigerstellungen kommt. Ist dies vielleicht bei einer anderen Eckenzahl des Zifferblatts möglich?

Aufgabe 3 (Logik)

In den folgenden drei Teilaufgaben wird zunächst ein Zusammenhang geschildert, aus dem ihr dann logisch auf eine der vier genannten Folgerungen schließen sollt.

a. Keine Maluma ist eine Tackete. Alle Tacketen sind Saabel.
   1) Es gibt Saabel, die keine Maluma sind.
   2) Alle Saabel sind Maluma.
   3) Kein Saabel ist ein Maluma.
   4) Keine der ersten drei Folgerungen ist logisch richtig.

b. Alle Druppel können hompfen. Es gibt Kniesel, die nicht hompfen können.
   1) Es gibt Druppel, die keine Kniesel sind.
   2) Alle Kniesel sind Druppel.
   3) Es gibt Kniesel, die keine Druppel sind.
   4) Keine der ersten drei Folgerungen ist logisch richtig.

c. Es gibt Murkel, die nicht grün sind. Es gibt Lybse, die nicht grün sind.
   1) Es gibt Lybse, die Murkel sind.
   2) Es gibt Lybse, die keine Murkel sind.
   3) Kein Lybs ist ein Murkel.
   4) Keine der ersten drei Folgerungen ist logisch richtig.

3.18.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Eine Dreiecksfläche)

Vorgegeben sind ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\left|\overline{AB}\right| = 8$ cm und eine natürliche Zahl n. Auf der Seite BC liegt der Punkt E, für den gilt $\left|\overline{BE}\right| = n \cdot \left|\overline{CE}\right|$. Der Mittelpunkt der Seite CD wird mit F bezeichnet. Die Gerade durch E und F schneidet die Verlängerung der Seite AB im Punkt G.

a. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks BGE, wenn $n = 4$ ist!

b. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks BGE in Abhängigkeit von n!

Aufgabe 2 (Erstaunliches mit Primzahlen)

Untersuche folgende Behauptung:

„Quadriert man eine beliebige Primzahl p, die größer als 3 ist, und zieht davon 1 ab, so ist das Ergebnis immer ohne Rest durch 24 teilbar.“

3.18.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Die drei Araber)

Zwei Araber sitzen in einer Oase unter einer Palme und wollen ihr Mittagsmahl verzehren. Der ältere der beiden hat fünf und der jüngere der beiden drei Fladenbrote bei sich. Da kommt noch ein dritter Araber des Weges und setzt sich zu ihnen. Er fragt die beiden anderen, ob er an der Mahlzeit teilnehmen dürfe. Er habe zwar kein Brot, dafür sei er aber bereit, für seinen Anteil am Essen acht Piaster zu zahlen. Die beiden sind einverstanden.

Wie müssen die acht Piaster verteilt werden, wenn man annimmt, dass alle acht Brote verzehrt werden und jeder der drei gleich viel isst.

Aufgabe 2 (Pilze)

Frau Müller hat im Wald 10 kg Pilze gesammelt.

a. Frau Müller und ihre 7 Freundinnen benötigen insgesamt 4 Minuten und 30 Sekunden, um alle Pilze zu reinigen. Wie lange würde die Reinigungsaktion insgesamt dauern, wenn 2 Minuten nach Beginn 6 der Frauen aufhören würden zu arbeiten. (Es soll davon ausgegangen werden, dass alle Frauen gleich schnell arbeiten).

b. Die 10 kg Pilze bestehen nach der Säuberungsaktion zu 99 % aus Wasser. Dummerweise lässt Frau Müller die Pilze in der Sonne stehen, so dass im Laufe des Tages ein Teil dieses Wassers verdunsten kann. Abends bestehen die Pilze nur noch zu 98 % aus Wasser. Wieviel Kilogramm wiegt der verbleibende Pilzmatsch noch?

Aufgabe 3 (Mördersuche)

Florian, Timo Lisa und Susi schauen sich zusammen einen Krimi an. Nachdem die Leiche eines Grafen gefunden worden war, stehen der Butler, der Gärtner und der Koch unter dringendem Tatverdacht. Florian, Timo, Lisa und Susi äußern folgende Vermutungen:

- Florian: „Ich glaube, der Butler war es.“
- Timo: „Nein, ich denke der Gärtner ist es gewesen.“
- Lisa: „Da wäre ich mir nicht so sicher, aber der Koch war es bestimmt nicht.“
- Susi: „Ich glaube nicht, dass es der Butler war.“

Nach der Aufklärung des Falles (der Mörder war ein Einzeltäter) zeigt sich, dass genau einer der vier mit seiner Vermutung richtig lag. Wer war der Täter ?

3.19 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2014

3.19.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Hin und Her im Koordinatensystem)

Im x-y-Koordinatensystem werden die natürlichen Zahlen auf einem Streckenzug angeordnet (s. Abb. 3.49). Zum Beispiel hat 9 die Koordinaten (1/3) und 16 die Koordinaten (4/1).

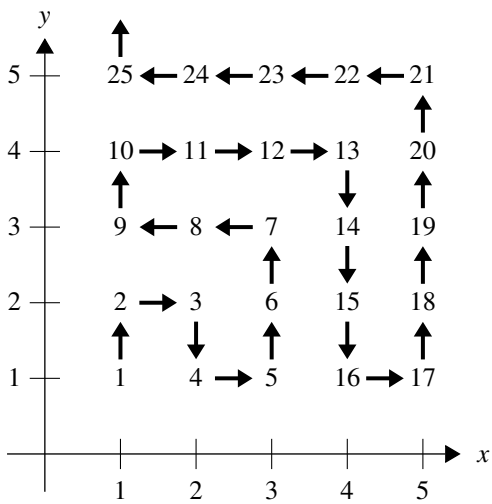


Abbildung 3.49:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 1

a. Ermittle jeweils, welche Zahl
   1. die Koordinaten (6/1),
   2. die Koordinaten (1/7),
   3. die Koordinaten (6/4) hat.
b. Bestimme, welche Koordinaten die Zahl 2014 hat.
c. Auf der 1. Winkelhalbierenden liegen die Zahlen mit den Koordinaten (n/n). Z.B. gehört zu den Koordinaten (2/2) die Zahl 3 und zu den Koordinaten (4/4) die Zahl 13. Ermittle allgemein, welche Zahl zu den Koordinaten (n/n) gehört.

Aufgabe 2 (Sparweltmeister)

a. Uschi ist sehr sparsam. Sie kauft eine Flasche mit einem Liter Orangensaft. Jeden Morgen trinkt sie ein Glas mit 250 ml und füllt die Flasche anschließend wieder mit Leitungswasser auf. Dies macht sie so lange, bis der Fruchtsaftanteil den Wert von 5% unterschreitet, dann trinkt sie die letzten Gläser ohne Wasser nachzufüllen. Nach wie vielen Tagen ist die Flasche leer?
b. Uschis Familie besteht aus drei Personen: ihrem Mann Rudi, ihrem Sohn Kevin und ihr selbst. Von jedem Familienmitglied wird jedes Jahr der Geburtstag im Familienkreis gefeiert. Zu diesem Zweck hat Uschi vor drei Jahren zehn Kerzen angeschafft, die mit den Ziffern 0 bis 9 beschriftet sind und mit denen bei jeder Feierlichkeit das Alter des Geburtstagskindes auf dem Kuchen gebildet wird. Da Uschi keinerlei Verschwendung toleriert, ist jedes Familienmitglied angehalten, die Kerze möglichst schnell auszublasen. Die Kerzen brennen daher bei jeder Verwendung nur 1mm herunter. Nach drei (vollen) Jahren ist die Kerze mit der „3“ um 7 mm abgebrannt, die „1“ und die „5“ sind je 3 mm, die „4“ und die „6“ je 2 mm geschrumpft und die „7“ wurde einmal benutzt. Alle anderen Kerzen sind noch neuwertig.
   Als nächster hat Kevin Geburtstag. Welche Kerzen wird er ausblasen? Notiert, durch welche Überlegungen Ihr die Lösung ermittelt habt.

Aufgabe 3 (Verbinden und Teilen)

a. In den folgenden Feldern sollen jeweils die Kisten mit gleichem Buchstaben verbunden werden. Dabei dürfen weder dber Rand des Feldes noch andere Kisten berührt werden, die Wege dürfen sich ebenfalls nicht berühren oder kreuzen (s. Abb. 3.50).

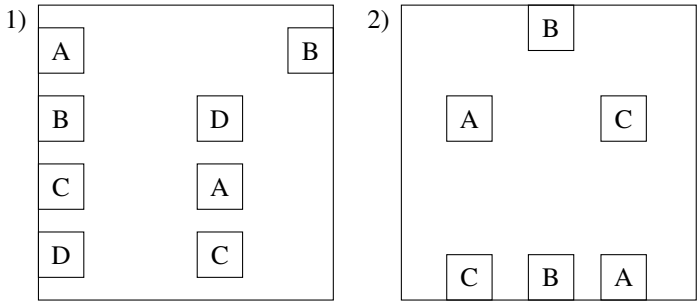


Abbildung 3.50:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3a

b. Vier Brüder erben gemeinsam ein quadratisches Grundstück, auf dem sich vier Apfelbäume befinden (s. Abb. 3.51). Da das Verhältnis zwischen den Brüdern schon seit Jahren etwas angespannt ist, ist die Aufteilung des Erbes schwierig – jeder ist darauf bedacht, bloß nicht schlechter als die Miterben abzuschneiden. Nach langer Diskussion einigt man sich auf folgende Lösung: Das Grundstück soll in vier Teile von identischer Form geteilt werden, und zwar so, dass sich auf jedem Grundstück ein Baum befindet. Finde eine geeignete Zerlegung .

c. Unten siehst du ein Achteck, das sich, wie gezeigt, in vier Teile zerlegen lässt (s. Abb. 3.52). Die einzelnen Teile sind dabei gleich groß und haben exakt die gleiche Form, wenn man einzelne Teile umdreht („deckungsgleich“). Das Achteck kann auch in fünf

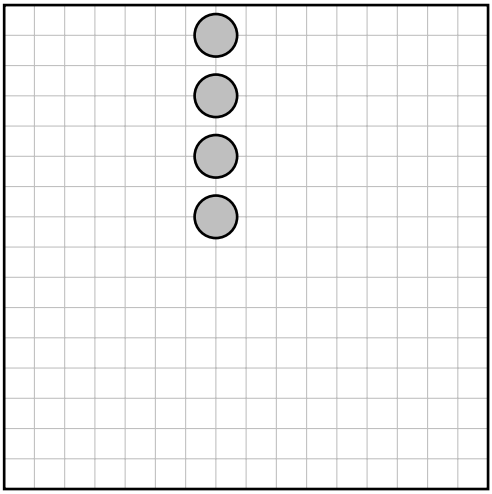


Abbildung 3.51:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3b

deckungsgleiche Teile zerlegt werden. Zeichne eine solche Zerlegung ein.

Aufgabe 4 (Spaß mit Trapezen)

Gegeben ist ein Trapez mit drei gleich langen Seiten. Die vierte Seite ist doppelt so lang wie eine der anderen (s. Abb. 3.53).

a. Bestimme das Verhältnis, das die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABE und ΔCDE zueinander haben.
b. Ermittle, unter welchem Winkel ϵsich die Diagonalen des Trapezes schneiden.

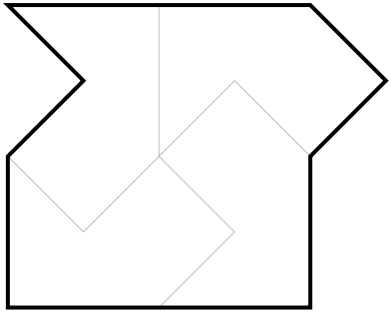


Abbildung 3.52:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3c

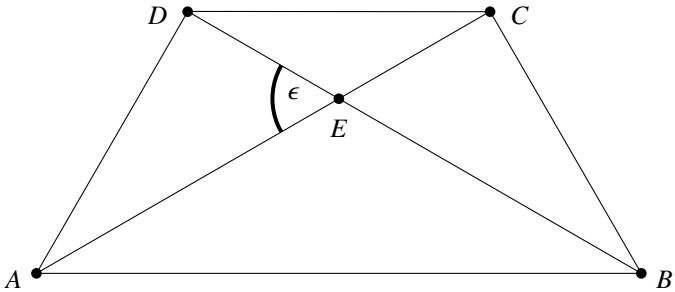


Abbildung 3.53:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4

3.19.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (In den Fußstapfen von Gauß)

Als der 7-jährige Carl Friedrich Gauß, der später „Fürst der Mathematik“ genannt wurde, auf seiner Schiefertafel die lange Rechnung $1+2+3+\ldots+99+100$ ausführen, d.h. die Summe der ersten 100 natürli-

chen Zahlen berechnen sollte, schrieb er nach kurzen Nachdenken 5050 als Ergebnis auf. Er hatte die Summanden geschickt zusammengefasst:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \\ = \; & (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) \\ = \; & 101 + 101 + \ldots + 101 \text{ (50 Summanden)} \\ = \; & 50 \cdot 101 = \underline{5050} \,. \end{aligned}$$

Beschreibe je ein Verfahren, mit dessen Hilfe sich auch folgende Aufgaben lösen lassen:

a. Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 5 bis 97.
b. Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 5 bis 97.
c. Berechne die Summe S_2 der zweistelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind.
d. Berechne die Summe S_4 der vierstelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind.
e. Gib eine allgemeine Vorschrift für die Berechnung der Summe der n-stelligen Zahlen an, deren Ziffern alle ungerade sind.

Aufgabe 2 (Aller guten Dinge sind drei)

Gesucht sind alle reellen Zahlentripel (x, y, z), die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} x + y + \frac{1}{z} &= 3 \,, \\ y + z + \frac{1}{x} &= 3 \,, \\ z + x + \frac{1}{y} &= 3 \,. \end{aligned}$$

a. Sonderfall 1: Alle drei Variablen haben den gleichen Wert. Begründe, dass es höchstens zwei Lösungen der drei Gleichungen geben kann, die dieser Bedingung entsprechen, und bestimme diese Lösungen.

b. Sonderfall 2: Zwei der Variablen besitzen den gleichen Wert, die dritte einen von diesem unterschiedlichen.
Begründe, dass die Anzahl der Lösungen, die diesem Muster entsprechen, ein Vielfaches von 3 sein muss. Ermittle diese Lösungen.
c. Übrige Fälle: Alle drei Variablen sind paarweise verschieden.
Begründe, dass das Gleichungssystem keine Lösungen besitzt, die dieser Bedingung entsprechen.

3.19.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Bunte Würfel)

Hier seht ihr den selben Würfel viermal abgebildet (s. Abb. 3.54).

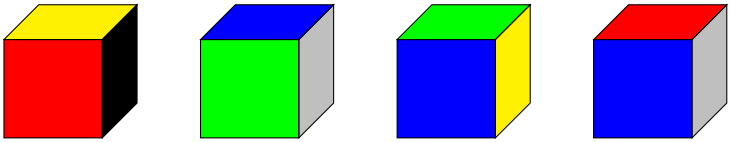


Abbildung 3.54:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 5 und 6, Aufg. 1

a. Welche Farbe hat jeweils die unten liegende Fläche?
b. Malt die noch weißen Quadrate in Abb. 3.55 so an, dass jeweils vier unterschiedliche Würfelnetze des bunten Würfels entstehen. Falls ihr nicht die passenden Stifte dabei habt, schreibt einfach „Rot“, „Gelb“ usw. in die weißen Quadrate.
c. Kann der Würfel so hingelegt werden, dass die folgenden Bedingungen alle gleichzeitig erfüllt werden?
1) Die schwarze Fläche liegt gegenüber der blauen Fläche.
2) Die blaue Fläche ist unten.
3) Die gelbe Fläche ist hinten.
4) Die rote und die grüne Fläche berühren sich nicht.

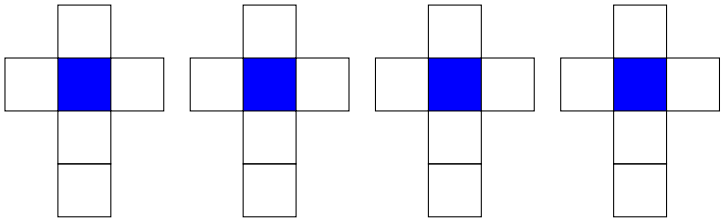


Abbildung 3.55:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 5 und 6, Aufg. 1b

5) Die rote Fläche ist rechts.
Begründet eure Behauptung.

d. Aus bunten Würfeln soll auf einem Holztisch eine Treppe gebaut werden. In Abb. 3.56 seht ihr als Beispiel eine Treppe mit vier Stufen. 32 Flächen der Würfel sind dann sichtbar.
1) Wie viele Flächen sind bei einer Treppe mit 6 Stufen sichtbar?
2) Ein Schüler hat eine Treppe gebaut, bei der 117 Flächen sichtbar sind. Aus wie vielen Würfeln besteht die Treppe?

Aufgabe 2 (Zahlenschloss)

Jans Zahlenschloss hat vier Rädchen. Bei jedem Rädchen kann man die Ziffern 0, 1, 2, 3 einstellen. Dummerweise hat Jan die Kombination vergessen. Um das Schloss doch zu öffnen, probiert er systematisch alle Einstellungen durch: 0000, 0001, 0002, 0003, 0010, 0011, 0012 usw.

a. Wie viele verschiedene Einstellungen muss Jan schlimmstenfalls durchprobieren?
b. Jan ist bei der Kombination 0312 angekommen, aber das Schloss ist immer noch nicht offen. Wie viele Einstellungen hat er bis dahin schon durchprobiert?
c. Jan braucht für jede Einstellung zwei Sekunden. Nachdem er insgesamt genau fünf Minuten probiert hat, geht das Schloss endlich auf. Wie lautet die richtige Kombination?

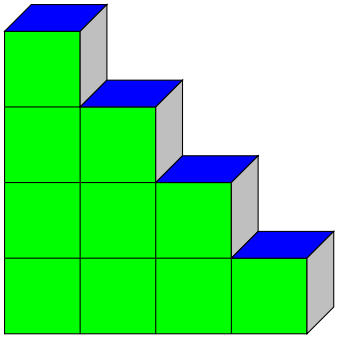


Abbildung 3.56:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 5 und 6, Aufg. 1d

Aufgabe 3 (Umzugsproblem)

Das Ehepaar Schneider zieht um. Den Möbeltransport lassen sie durch eine Spedition durchführen. Die neue Wohnung hat sechs etwa gleich große Zimmer, Herr und Frau Schneider besitzen fünf große Möbelstücke (Bett, Couch, Schrank, Tisch und Klavier), von denen immer nur eines gleichzeitig in jeden der Räume passt. Nun hat die Umzugsfirma beim Einräumen der Wohnung leider einen schwerwiegenden Fehler gemacht – Bett und Klavier wurden vertauscht und stehen nun jeweils im falschen Raum. Den Grundriss und die jetzige Verteilung siehst du in Abb. 3.57.

Dieser Fehler soll korrigiert werden, das Klavier soll also in den Raum, in dem jetzt das Bett steht und umgekehrt. Da die Wohnung im 16. Stock liegt, sollte das Umräumen möglichst geschehen, ohne einzelne Möbel wieder nach draußen tragen zu müssen. Finde eine Möglichkeit, die Möbel so zu verschieben, dass am Ende die Positionen von Klavier und Bett vertauscht sind. Die Positionen aller anderen Möbel sind egal, diese müssen am Ende also nicht unbedingt in dem gleichen Raum stehen, in dem sie sich jetzt befinden.

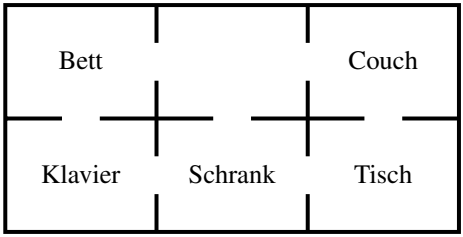


Abbildung 3.57:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 5 und 6, Aufg. 3

Die Lösung mit der geringsten Anzahl an Zügen erhält 10 Punkte, für jeden zusätzlichen Zug wird ein Punkt abgezogen.

Tragt jeweils den Gegenstand, den Ihr in das gerade freie Zimmer schieben wollt, in eine solche Tabelle ein:

Schritt	Gegenstand
1	
2	
3	
⋮	

3.20 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2015

3.20.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Vier Vieren)

Man kann die Zahl 1 mit genau vier Vieren (sonstige Ziffern verboten) auf verschiedene Arten als Rechenaufgabe darstellen.

Beispiel: $1 = 4 + 4 : 4 - 4$

Stellt auch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 durch eine Rechenaufgabe aus genau vier Vieren dar! (Dabei sind natürlich auch Klammern erlaubt.)

Aufgabe 2 (Rechenergebnisse mit zwei Zahlen)

Mit zwei verschiedenen natürlichen Zahlen werden folgende Rechenoperationen ausgeführt:

- Die Zahlen werden addiert.
- Die kleinere Zahl wird von der größeren subtrahiert.
- Die Zahlen werden multipliziert.
- Die größere Zahl wird durch die kleinere dividiert.

a. Die Summe der vier Rechenergebnisse ist 32. Ferner ist bekannt, dass die größere der beiden Zahlen 6 ist. Bestimmt die zweite Zahl.
b. Unter welcher Bedingung ist die Summe der vier Rechenergebnisse wieder eine natürliche Zahl, also eine Zahl ohne Nachkommastellen?

c. Die Summe der vier Rechenergebnisse soll nun 3125 sein. Um welche beiden Zahlen handelt es sich dann? Bestimmt alle Lösungsmöglichkeiten.

Aufgabe 3 (Doppelspirale)

Die abgebildete Doppelspirale D_5 ist ein Streckenzug (s. Abb. 3.58), bei dem man an beiden Enden einer Strecke von 5 Längeneinheiten (LE) jeweils eine Spirale anhängt. Diese Spirale entsteht, indem man die Streckenlängen bei jedem Richtungswechsel um 1 LE verringert.

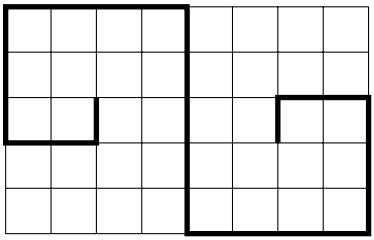


Abbildung 3.58:
Gymnasium Carolinum 2015, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3

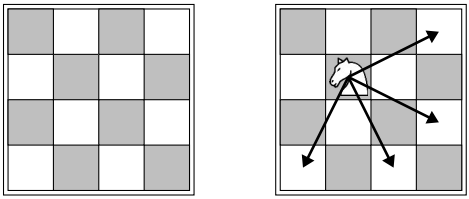
a. Bestimmt die Länge des Streckenzugs von D_7 in Längeneinheiten!
b. Zeichnet den Streckenzug von D_{10}!
c. In welche Richtung zeigt das Ende der kürzesten Teilstrecke in der linken Spirale bei D_{2015}, wenn die längste Strecke wie oben vertikal verläuft. (Hinweis: In D_5 zeigt das Streckenstück nach oben.)
d. Schreibt allgemein die Länge des Streckenzugs D_n als Summe auf und zeigt anschließend durch Umformen, dass diese Summe gleich n^2 ist! (Hinweis: Es darf benutzt werden, dass gilt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \text{ .)}$$

e. Es ist aus anderen Kontexten bekannt, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen auch n^2 ist. Verwendet diese Tatsache, um auf einem anderen Weg zu zeigen, dass die Länge des Streckenzuges D_n n^2 ist!

Aufgabe 4 (Springerproblem)

Jedes der 16 Felder eines 4×4-Schachbretts (s. Abb. 3.59a) ist mit einem Springer besetzt. Mit allen sechzehn Figuren soll gleichzeitig ein Zug gemacht werden, so dass anschließend auf jedem Feld wieder ein Springer steht. (Hinweis: Die Springer dürfen nur gemäß der im Schachspiel üblichen Weise gezogen werden. Beispiele für mögliche Springerzüge, ausgehend von der markierten Position, sind in der Abbildung 3.59b dargestellt.)



a b

Abbildung 3.59:
Gymnasium Carolinum 2015, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4

a. Wie müssen die einzelnen Züge aussehen? Gebt mindestens zwei Möglichkeiten an!
b. Findet eine Lösung für ein ebenfalls voll besetztes 5×5-Schachfeld!
c. Nun wird allgemein ein n?n$n \times n$-Schachfeld betrachtet, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$. Gebt in Abhängigkeit von der Zahl n an, ob ein solcher Zug mit allen Springern, bei dem auch alle wieder einen neuen Platz erhalten, möglich ist.

3.20.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Fußballturnier II)

Vor dem letzten Spiel des Fußballturniers der „Bolzer“ ergibt sich der untenstehende Tabellenstand. Hierbei erhält jede Mannschaft für ein gewonnenes Spiel drei Punkte, bei einem Unentschieden einen Punkt und bei einem verlorenen Spiel keinen Punkt. Turniersieger ist die Mannschaft mit den meisten Punkten. Bei gleicher Punktzahl bestimmt die höhere Tordifferenz den Tabellenplatz. Bei gleicher Tordifferenz entscheidet die größere Anzahl der von der Mannschaft geschossenen Tore.

	Siege	Unentsch.	Niederl.	Spiele	Punkte	Tore
Chillies				2	4	5 : 2
Abräumer				3	4	1 : 3
Drachen				3	3	2 : 2
Bolzer				2	1	0 : 1

a. Bestimmt die Anzahl der bisher bereits gespielten Spiele, übertragt die ersten vier Spalten der Tabelle und füllt sie folgerichtig aus, indem ihr die Anzahl der Siege, der Unentschieden und der Niederlagen für jede Mannschaft angebt!
b. Die „Bolzer“ führen im letzten Spiel 3:1. Bis zum Spielende fällt noch ein weiteres Tor. Welche Auswirkungen kann das auf den endgültigen Tabellenplatz der „Bolzer“ haben?
c. Notiert für alle Spiele vor dem letzten Spiel der „Bolzer“ die Paarungen und die zugehörigen Endstände!

Aufgabe 2 (Dreieck aus Dreieck II)

Gegeben ist ein allgemeines Dreieck ABC. Für das Dreieck $A'B'C'$ gilt: A' ist der Spiegelpunkt von A bei Punktspiegelung an B. Analog

ergeben sich die Punkte B' und C' durch Spiegelung an C bzw. A (s. Abb. 3.60).

a. Fertigt, ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge 4 cm, eine Zeichnung vom Dreieck $A'B'C'$ an und vergleicht mit Hilfe von Messungen in der Zeichnung die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$!
b. Vergleicht nun allgemein die Flächeninhalte von Dreiecken ABC und$A'B'C'$, die in oben beschriebener Weise zusammenhängen! Hierbei ist auf die Allgemeinheit der Argumentation besonders zu achten! (Hinweis: Betrachtet geeignete Teilflächen des Dreiecks $A'B'C'$!)

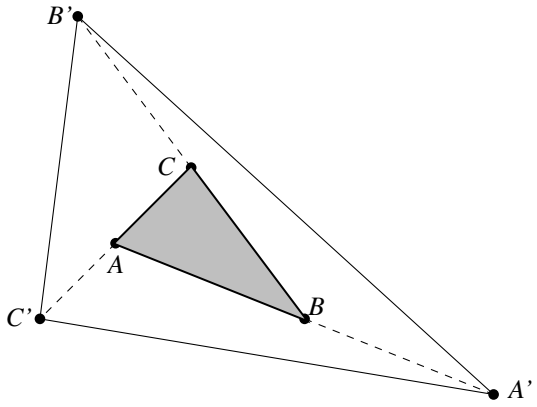


Abbildung 3.60:
Gymnasium Carolinum 20150, Klasse 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 2

3.20.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Logical Schülerband)

Fünf Jungs gründen die Band „Die lauten Mathematiker“. Der Name ist entstanden, weil alle an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und die ersten fünf Plätze belegt haben. Die Jungen spielen Schlagzeug, Saxophon, Keyboard und Gitarre. Paul singt dazu.

- Für Stephan haben sich die Keyboardstunden gelohnt.
- Paul war traurig, dass er nicht Erster wurde.
- Nils ist nicht Erster, aber auch nicht Vierter geworden. Er spielt Schlagzeug.
- Timo ist Zweiter geworden, er spielt keine Gitarre.
- Guido freut sich auch über einen fünften Platz.

a. Welche Plätze haben die Jungs jeweils bei der Mathematik-Olympiade belegt?
b. Wer hat in der Band welche Aufgabe?

Aufgabe 2 (Vier Vieren II)

Man kann die Zahl 1 mit genau vier Vieren (sonstige Ziffern verboten) auf verschiedene Arten als Rechenaufgabe darstellen.

Beispiel: 1 = 4 + 4 : 4 – 4

Stellt auch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 durch eine Rechenaufgabe aus genau vier Vieren dar! (Dabei sind natürlich auch Klammern erlaubt.)

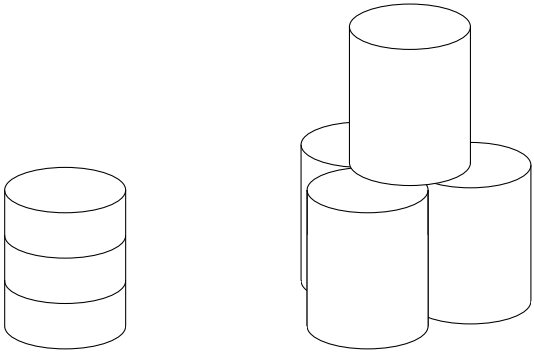


Abbildung 3.61:
Gymnasium Carolinum 20150, Klasse 5 u. 6, Aufg. 3

Aufgabe 3 (Dosen bemalen)

Annabella feiert nächsten Monat ihren Geburtstag und hat über viele Wochen gleich große leere Konservendosen gesammelt. Die Dosen sind oben offen und haben keine Beschriftung mehr. Damit die Dosen etwas schöner aussehen, möchte Annabella drei gleich breite Streifen auf die

Dosen malen, und zwar so, dass der ebenfalls bemalte Boden und der daran angrenzende unterste Streifen nicht die gleiche Farbe haben und benachbarte Streifen auch nicht. Natürlich soll jeder der vier Bereiche tatsächlich bemalt werden (s. Abb. 3.61 links).

a. Annabella findet zu Hause nur die Farben Rot und Blau. Wie viele Dosen kann sie unterschiedlich bemalen?
b. Annabellas Mutter findet noch einen Topf mit gelber Farbe. Wie viele Dosen kann sie nun unterschiedlich bemalen, wobei nicht immer alle drei Farben verwendet werden müssen?
c. Bisher sind alle Dosen zwei- und dreifarbig. Der Nachbar bringt noch grüne Farbe vorbei und Annabella will weitere Dosen, und zwar jetzt immer vierfarbig, anmalen. Wie viele weitere unterschiedliche Dosen kann sie so bemalen?
d. Annabella ist nun fertig und hat eine ganze Menge Dosen bemalt. Sie möchte aus ihnen eine sechsstufige Pyramide aus lauter verschiedenen Dosen aufbauen. (In Abb. 3.61 rechts ist eine zweistufige Pyramide dargestellt.)
   Reichen ihre Dosen, um diese Pyramide aufzubauen?
   Wie viele der Dosen in der sechsstufigen Pyramide sind tatsächlich von außen sichtbar?

4 Die Lösungen

Auf Anregung aus der Kollegenschaft habe ich den Aufgaben hier auch die Lösungen beigegeben. Ich habe dazu die von den Verfassern angegebenen Lösungen von etwaigen Bewertungsrichtlinien und alternativen Lösungswegen befreit, auch hier und da versucht, durch Tabellen oder Formeln die Lösungswege transparent zu machen. Bei den älteren Jahrgängen, zu denen mir keine Lösungen vorlagen, habe ich diese frei erstellt. Insofern bin ich für die Formulierung der Lösungen allein verantwortlich. (*L. M.*)

4.1 Ratsgymnasium Osnabrück 1996

4.1.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Der Page des Königs)

Wir listen alle möglichen Verteilungen auf.

0	2	7	10	1	3	6	11	8	4	5	9
0	1	2	3	4	5	**6**	7	**8**	9	10	11
1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	5	6	7	8	9	10	**11**	0	1	2	3
5	6	**7**	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	8	9	**10**	11	0	1	2	3	**4**	5	6
8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	10	11	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8
10	11	0	1	2	**3**	4	5	6	7	8	**9**
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dabei erkennen wir, dass einzig drei Übereinstimmungen zwischen Kästchennummer und Kästcheninhalt nur einmal auftreten. Also befinden sich 0 Kugeln in dem Kästchen mit der Aufschrift „0“.

Aufgabe 2 (Endziffern)

Die ersten fünf Potenzen von 7 lauten 7, 49, 343, 2401 und 16807. $7^5 = 16807$ hat die Enziffern 07.

Ab 7^4 wiederholen sich die Endziffern. Bei allen durch 4 teilbaren Exponenten n endet 7^n mit den Ziffern 01, mithin auch für den Exponenten 1996.

Aufgabe 3 (Punkt im Winkel)

Man spiegelt Punkt P an den beiden Schenkeln des Winkels und erhält die Spiegelpunkte P' und P''. Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABP$ ist

minimal, wenn A und B auf der Verbindungsgeraden von P' und P'' liegen.

Aufgabe 4 (Fünf Kreise)

1. Fall: Zwei der fünf Kreise haben nur einen gemeinsamen Punkt, z. B. K_1 und K_2 den einzigen gemeinsamen Punkt A. Damit K_1, K_2, K_3 überhaupt einen gemeinsamen Punkt haben können, muss auch K_3 durch A gehen. Das Gleiche gilt für K_4 und K_5, alle 5 Kreise gehen durch A.

2. Fall: Bleibt der Fall, dass jeweils zwei Kreise sich in genau zwei Punkten schneiden. K_1 und K_2 haben die Schnittpunkte A und B. K_3 muss durch ebenfalls A oder durch B gehen, dasselbe gilt für K_4 und K_5. Gehen alle drei durch A, sind wir fertig.

Wie aber, wenn K_3 und K_4 durch A gehen, aber nicht durch B, K_5 dagegen durch B, aber nicht durch A? Gemeinsamer Schnittpunkt von K_1, K_2, K_3, K_5 kann nur A oder B sein – wegen K_1 und K_2. Aber K_3 geht nicht durch B und K_5 nicht durch A. Dieser Fall ist also gar nicht möglich.

4.1.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Verworrene Familienverhältnisse)

Die Summe des Alters aller vier Personen ist $(154+221+186+132) : 3 = 231$ Jahre. Daraus errechnet sich das Alter jeder einzelnen Person zu $231 - 132 = 99$ Jahre, $231 - 154 = 77$ Jahre, $231 - 186 = 45$ Jahre und $231 - 221 = 10$ Jahre.

Aufgabe 2 (Fußballturnier)

In jeder Vorrundengruppe sind $1+2+\ldots+9 = 45$ Spiele erforderlich, macht zusammen 90 Spiele. Bleiben noch $10 = 1+2+3+4$ Spiele möglich. An der Endrunde könnten also 5 Mannschaften beteiligt werden – aus Gründen der Gerechtigkeit aus jeder Gruppe aber nur zwei.

4.2 Ursulaschule Osnabrück 1997

4.2.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Logical OMO)

Die Schüler haben das Alter n, n und $n + 1$. Jutta sitzt in Raum 49, Günter in 50 und Klaus in 48. Das Eineinhalbfache ist nur von 48 ganzzahlig zu bilden, in diesem Raum sitzt Herr Drossel. Drossel und Bär sind nicht Lehrer von Jutta, also Adler. Deshalb sitzt Adler bei Günter, Drossel ist Lehrer von Günter und Bär also, was bleibt anderes übrig, Lehrer von Klaus. Ergebnis: Bär sitzt in Raum 49 und heißt Klaus.

Schüler	Klaus	Jutta	Günter
Raum	48	49	50
Lehrer	Drossel	Bär	Adler

Aufgabe 2 (Pythagorasfigur)

Die Gesamtfläche setzt sich zusammen aus den Teilflächen *I* bis *VII* (siehe Abb. 4.1). Die Flächen *I* bis *V* ergeben sich umittelbar zu a^2, b^2, $a^2 + b^2$, $\frac{ab}{2}$ und $\frac{ab}{2}$. Die Flächen *VI* und *VII* gewinnt man aus ihrer Gleichheit mit den Flächen *VI'* und *VII'* als $\frac{ab}{2}$ und $\frac{ab}{2}$. Die Gesamtfläche beträgt $2a^2 + 2ab + 2b^2$.

Aufgabe 3 (Konzentrische Kreise)

Der kleine Radius sei r, der große R (siehe Abb 4.2). Dann gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= (x-r)^2 + y^2 \\ b^2 &= (x+r)^2 + y^2 \\ a^2 + b^2 &= 2x^2 + 2r^2 + 2y^2 \\ &= \underline{\underline{2R^2 + 2r^2}} \end{aligned}$$

(Letzteres wegen $x^2 + y^2 = R^2$.)

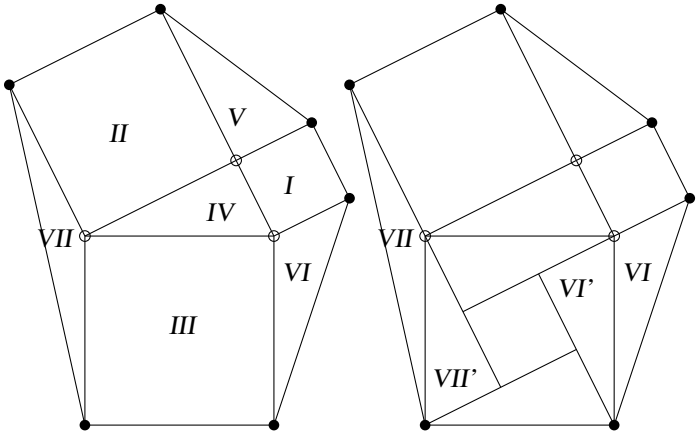


Abbildung 4.1: Ursulaschule 1997, Schriftl. Teil, Aufg. 2

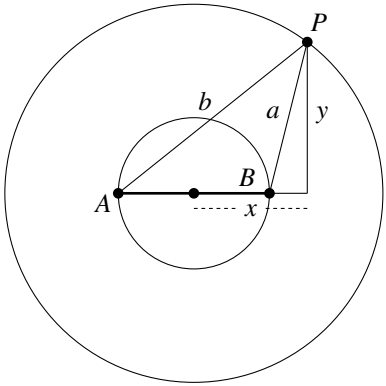


Abbildung 4.2: Ursulaschule 1997, Schriftl. Teil, Aufg. 3

Aufgabe 4 (Sechsstellige Zahl)

abcabc entsteht aus *abc* durch Multiplikation mit $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Diese Primfaktoren können in *abc* nicht alle enthalten sein, da $abc < 1001$.

4.2.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Drei Gegenstände)

Man listet alle möglichen Verteilungen auf und schaut, ob die Antworten jeweils wahr oder falsch sind.

A	B	C	Ergebnis
Ball	Bleist.	Schere	*wwf*
Ball	Schere	Bleist.	*www*
Bleist.	Ball	Schere	*fff*
Bleist.	Schere	Ball	*fww*
Schere	Ball	Bleist.	*ffw*
Schere	Bleist.	Ball	*fww*

Die vorletzte Zeile entspricht als einzige der Vorgabe „zwei Antworten falsch, eine wahr“.

Aufgabe 2 (Endziffer Null)

Entscheidend ist, wie oft der Primfaktor 5 in dem Ausdruck vorkommt. (Die 2 ist in jedem Fall zu Genüge vorhanden.) In 50! kommen 10 Faktoren vor, die durch 5 teilbar sind, und zwei davon sogar durch 25. 50! enthält also den Faktor 10 zwölf Mal, es endet mit zwölf Endziffern Null.

1997! enthält 399 Vielfache von 5, 79 Vielfache von 25, 15 Vielfache von 125 und 3 Vielfache von 625. Es endet mit $399 + 79 + 15 + 3 = 496$ Endziffern Null.

4.3 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 1998

4.3.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Eheprobleme)

Die nachfolgende Tabelle lässt sich sukzessive ausfüllen. Die Zahlen geben eine mögliche Reihenfolge dafür an.

Mann	Ted(1)	Pete(2)	Karl(3)
Frau	Barbara(9)	Sue(11)	Nicola(10)
Kind	Ruth(5)	Vera(6)	Dieter(7)
Märchen	Schneew.(8)	Rotk.(4)	

Aufgabe 2 (Fünfersumme)

Restklassen modulo 3 sind das Lösungswerkzeug.

1. Fall: Eine Restklasse ist dreimal vertreten. Nimme diese drei Zahlen, denn es ist $\bar{0} \oplus \bar{0} \oplus \bar{0} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2} \oplus \bar{2} \oplus \bar{2} = \bar{0}$.

2. Fall: Keine Restklasse ist dreimal vertreten. Dann sind aber alle drei Restklassen vertreten. Nimm aus jeder Restklasse eine Zahl, denn es ist $\bar{0} \oplus \bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{0}$.

Aufgabe 3 (Seitenhalbierende)

Aus Dreieck $\triangle ABS$ liest man ab: $\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$. Entsprechendes gilt für alle Dreiecksseiten. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a + &> a + b + c, \\
\frac{4}{3}(s_a + s_b + s_c) &> a + b + c; \\
s_a + s_b + s_c &> \frac{3}{4}(a + b + c).
\end{aligned}$$

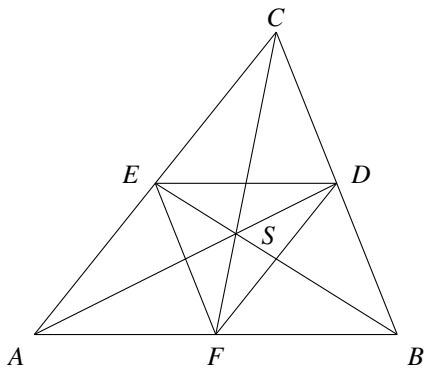


Abbildung 4.3:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 1997, Schriftl. Teil, Aufg. 3

Aus Dreieck $\triangle ADE$ liest man ab: $s_a < \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$. Entsprechendes gilt für die anderen Seitenhalbierenden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} s_a + s_b + s_c &< \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Punktmenge)

Als Hilfslinien benötigen wir die Mittelsenkrechten der Halbdiagonalen $\bar{AS}$, $\bar{BS}$, $\bar{CS}$ und $\bar{DS}$. Diese schließen gemeinsam ein Viereck ein, das aus Symmetriegründen eine Raute ist. Die Berandung gehört ebenfalls zur gesuchten Punktmenge (s. Abb. 4.4).

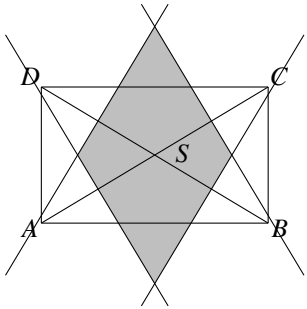


Abbildung 4.4:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 1997, Schriftl. Teil, Aufg. 4, Lösung

4.3.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Münzwurf)

Damit das 50-Pfennig-Stück vollständig in einem Karo zu liegen kommt, muss sein Mittelpunkt im Innern eines Quadrates mit 1 cm Seitenlänge liegen. Jedes Karo enthält 9 solcher Quadrate. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt $\frac{1}{9}$.

Von 5040 Spielen werden etwa 560 gewonnen und 4480 verloren. Einahmen von 2520 DM steht eine Gewinnsumme von 560 DM gegenüber. Am Ende werden also ungefähr 1960 DM in der Kasse sein.

Aufgabe 2 (Die eingeschobene Null)

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn ihre Endziffer gerade und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Durch Einfügen von beliebigen Ziffern Null ändert sich die Quersumme nicht und auch nicht die gerade Endziffer.

Andere Teiler, bei denen man ähnlich argumentieren kann, sind 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 45, sowie alle Zahlen, die man hieraus durch Multiplikation mit beliebigen Zehnerpotenzen erzeugt.

2: Endziffer (des Dividenden) gerade;
3: Quersumme teilbar durch 3;
5: Endziffer 5 oder 0;
(6: s. o.;)
9: Quersumme teilbar durch 9;
10: Endziffer 0;
15: Quersumme teilbar durch 3 und Endziffer 5 oder 0;
45: Quersumme teilbar durch 9 und Endziffer 5 oder 0;

Multipliziert man eine dieser Zahlen mit 10^n, so endet der neue Teiler und deshalb auch der Dividend auf n Ziffern 0, nach Einfügen der Ziffern 0 endet der Dividend auf mindestens $n+1$ Ziffern 0. Lässt man für die Division n Ziffern 0 in Dividend und Divisor entfallen, endet der Dividend immer noch auf 0, und diese 0 erfüllt als Endziffer jede einzelne der oben auftretenden Bedingungen.

4.4 Gymnasium Melle 1999

4.4.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Würfel)

Man kann die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns abschätzen, wenn man für alle oben angegebenen Würfelkombinationen die 36 Ergebnisse eines gemeinsamen Wurfes mit ihren Punktgewinnen in einer Tabelle auflistet und damit den zu erwartenden Gewinn bei einem Wurf berechnet.

In der ersten Zeile bzw. Spalte sind die möglichen Augenzahlen des jeweiligen Würfels aufgelistet; in der Tabelle steht ein V für Verlust von einem Punkt, ein G für Gewinn von einem Punkt und ein - für keinen Punkt (jeweils bezogen auf den zuerst aufgeführten Würfel).

Liste der möglichen Würfelkombinationen:

Tab. 1, gelb/rot

	2	2	2	5	6	6
3	G	G	G	V	V	V
3	G	G	G	V	V	V
3	G	G	G	V	V	V
3	G	G	G	V	V	V
6	G	G	G	G	-	-
6	G	G	G	G	-	-

P(„gelb gewinnt gegen grün“) = 20:36

Tab. 2, grün/gelb

	3	3	3	3	6	6
3	-	-	-	-	V	V
4	G	G	G	G	V	V
4	G	G	G	G	V	V
4	G	G	G	G	V	V
4	G	G	G	G	V	V
5	G	G	G	G	V	V

P(„grün gewinnt gegen gelb“) = 20:36

Tab. 3, blau/grün

	3	4	4	4	4	5
1	V	V	V	V	V	V
1	V	V	V	V	V	V
5	G	G	G	G	G	-
5	G	G	G	G	G	-
5	G	G	G	G	G	-
5	G	G	G	G	G	-
5	G	G	G	G	G	-

P(„blau gewinnt gegen grün“) = 20:36

Tab. 4, rot/blau

	2	2	2	5	6	6
2	G	G	V	V	V	V
2	G	G	V	V	V	V
2	G	G	V	V	V	V
5	G	G	-	-	-	-
6	G	G	G	G	G	G
6	G	G	G	G	G	G

P(„rot gewinnt gegen blau“) = 20:36

Tab. 5, gelb/blau

	1	1	5	5	5	5
3	G	G	V	V	V	V
3	G	G	V	V	V	V
3	G	G	V	V	V	V
3	G	G	V	V	V	V
3	G	G	V	V	V	V
4	G	G	G	G	V	V
6	G	G	G	G	G	G

P(„gelb gewinnt gegen blau“) = 20:36

Tab. 6, blau/grün

	2	2	2	5	6	6
3	G	G	G	V	V	V
4	G	G	G	V	V	V
4	G	G	G	V	V	V
4	G	G	G	V	V	V
4	G	G	G	V	V	V
5	G	G	G	-	V	V

P(„grün gewinnt gegen rot“) = 18:36

Es werden nur vier Tabellen (1 bis 4 oder 1, 2, 3, 5) benötigt um eine Gewinnstrategie zu entwickeln. Tabelle 2 sollte nicht durch Tabelle 6 ersetzt werden, da die Gewinnwahrscheinlichkeit nur für grün 50% beträgt.

Die möglichen Gewinnstrategien lauten:

Wenn der Gegner den roten Würfel wählt, nimm den gelben; wenn der Gegner den gelben Würfel wählt, nimm den grünen; wenn der Gegner den grünen Würfel wählt, nimm den blauen; wenn der Gegner den blauen Würfel wählt, nimm den roten oder den gelben.

Aufgabe 2 (Quadrat)

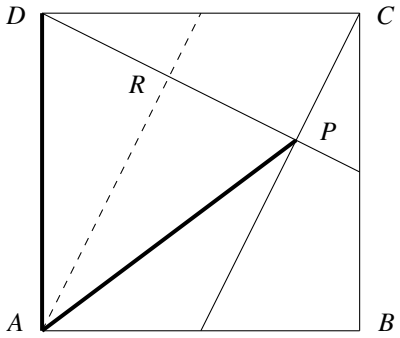


Abbildung 4.5: Melle 1999, Schriftl. Teil, Aufg. 2, Lösung

Die gestrichelte Linie geht von A zum Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Man kann zeigen, dass sie Mittelsenkrechte ist zu $\overline{PD}$. Demzufolge ist das Dreieck $\triangle APD$ gleichschenklig.

Aufgabe 3 (Primzahlen)

a. Alle Primzahlen außer 2.
b. Die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist stets durch 3 teilbar.
c. Wir bilden die Summe von $n > 3$ aufeinanderfolgenden Zahlen größer null.

$$\begin{aligned} s &= k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k + (n-1)) \\ &= n \cdot k + 1 + 2 + \ldots + (n-1) \\ &= n \cdot k + \frac{(n-1) \cdot n}{2}. \end{aligned}$$

Ist n ungerade, so ist s durch n teilbar; ist n gerade, so ist s durch $\frac{n}{2}$ teilbar.

Aufgabe 4 (Bruchvergleich)

Aus zwei Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{u}{v}$ (a, b, u, v natürliche Zahlen mit $a < b$ und $u < v$) erhält man nach diesem Verfahren die neuen Brüche $\frac{a}{b-a}$ und $\frac{u}{v-u}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{u}{v}, \\ av &< ub, \\ av - au &< ub - au, \\ a(v-u) &< u(b-a), \\ \frac{a}{b-a} &< \frac{u}{v-u}. \end{aligned}$$

Susis Verfahren funktioniert hervorragend.

Wenn mindestens einer von beiden Brüchen unecht geworden ist, muß man aufhören - in der Hoffnung, dass einem die Entscheidung nun leichter fällt.

Die Entscheidung ist trivial, wenn ein Bruch unecht wird und einer echt bleibt!

Wenn beide Brüche gleichzeitig unecht werden, wandelt man sie in gemischte Brüche um. Bei unterschiedlichem ganzzahligen Anteil ist die Entscheidung klar, bei gleichem ganzzahligen Anteil wendet man das Verfahren auf den Bruchanteil an. Da die Nenner immer kleiner werden, werde ich früher oder später zu einem Ende kommen.

4.4.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Wegnehmspiel)

Die beiden Haufen können beide eine gerade Anzahl haben, beide eine ungerade Anzahl haben oder eine ungerade und eine gerade. Zu unterscheiden sind also die drei Fälle $g|g$, $g|u$, $u|u$. A gewinnt, wenn es ihm gelingt, seinem Gegenspieler den Spielstand $1|1$ zu hinterlassen. $1|1$ gehört zum Fall $u|u$.

a. A findet $g|g$. Er nimmt ein g fort. Da man jede gerade Zahl als Summe zweier ungerader Zahlen darstellen kann, hinterläßt er für B die Haufen $u|u$.

b. A findet $g|u$. Er nimmt u fort und zerlegt wie oben g in $u|u$.

c. A findet $u|u$. Er nimmt ein u fort und zerlegt das andere u notgedrungen in $g|u$. Oder er findet $1|1$ und hat sowieso verloren.

In 1) und 2) ergibt sich der Spielverlauf – (A) $u|u$ – (B) $g|u$ – (A) $u|u$ – (B) $g|u$ – (A) $u|u$. Da die Haufen immer kleiner werden, hinterläßt A irgendwann $1|1$ und gewinnt.

In 3) ergibt sich der Spielverlauf – (A) $g|u$ – (B) $u|u$ – (A) $g|u$ – (B) $u|u$ und B gewinnt.

Aufgabe 2 (Weg im Dreieck)

Beachte in b. den Sonderfall, dass der Lichtstrahl genau in der Mitte der Dreiecksseite beginnt.

4.5 Gymnasium Oesede 2000

4.5.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Trapez)

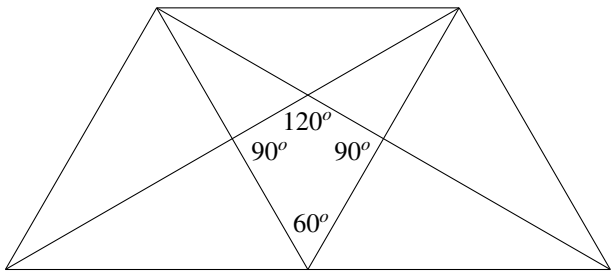


Abbildung 4.6:
Gymnasium Oesede 2000, Schriftl. Teil, Aufg. 1, Lösung

Es entsteht ein Ensemble von drei gleichseitigen Dreiecken, aus dem man die Winkel leicht erschließt.

Aufgabe 2 (Primzahlzwillinge)

Primzahlen größer 10 sind stets ungerade und enden nie auf 5. Primzahlpaare haben also die Endziffern (1, 3) oder (7, 9) oder (9, 1). Die drei genannten Faktoren sind gerade, mindestens einer endet auf 0. Letzterer enthält den Teiler 10. Die beiden anderen sind durch zwei teilbar, und von drei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 3 teilbar. Ihr Produkt enthält also das Teilprodukt $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 = 120$.

Aufgabe 3 (Magisches Dreieck)

a. Die magische Summe ergibt sich, indem man die Zahlen von 1 bis 6 addiert, die Eckfelder noch einmal gesondert hinzunimmt, da sie ja an je zwei Seiten beteiligt sind, und das ganze durch 3

teilt. Da die Summe von 1 bis 6 durch 3 teilbar ist, muss auch die Summe der drei Eckfelder durch 3 teilbar sein. Von den somit übrig bleibenden Dreiergruppen entfallen (1,2,6), (1,5,6) und (2,3,4), weil mit ihnen ein magisches Dreieck ersichtlich nicht möglich ist. Es gibt also vier wesentlich verschiedene magische Dreiecke mit den Eckwerten (1,2,3), (4,5,6), (1,3,5) und (2,4,6).

b. Man bildet zu jedem $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ den Ausdruck $13 \cdot i + 4$.

c. Wir benennen die unbekannten Zahlen, gegen den Uhrzeigersinn laufend und rechts neben dem b beginnend, mit x, y, z. Die magische Eigenschaft verlangt, dass $a + b + x = x + c + y$. Daraus folgt $y = a + b - c$.

Aufgabe 4 (Offenen Karten)

A fängt an, aber für B gibt es eine Gewinnstrategie. Es gibt nämlich eine Reihe von „guten“ Zahlen, die B zum Siege führen.

36 ist eine gute Zahl, die beste überhaupt.

30 ist eine gute Zahl, denn mit 7, 8, 9, 10, 11 hat der Gegner verloren, bei 2, 3, 4 erreicht man im nächsten Schritt die 36.

18 ist eine gute Zahl, denn dann kann man eine Runde später wieder eine gute Zahl erreichen:

Es liegt	18							
A legt	2	3	4	7	8	9	10	11
B legt	10	9	8	11	10	9	8	7
ergibt	30	30	30	36	36	36	36	36

12 ist eine gute Zahl aus demselben Grunde:

Es liegt	12							
A legt	2	3	4	7	8	9	10	11
B legt	4	3	2	11	10	9	8	7
ergibt	18	18	18	30	30	30	30	30

Und auch nach jeder beliebigen ersten Karte kann B eine gute Zahl erreichen;

Es liegt	0							
A legt	2	3	4	7	8	9	10	11
B legt	10	9	8	11	10	9	8	7
Summe	12	12	12	18	18	18	18	18

B muss also in jedem Schritt darauf achten, eine gute Zahl zu hinterlassen, dann wird er gewinnen.

4.5.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Entfernungen)

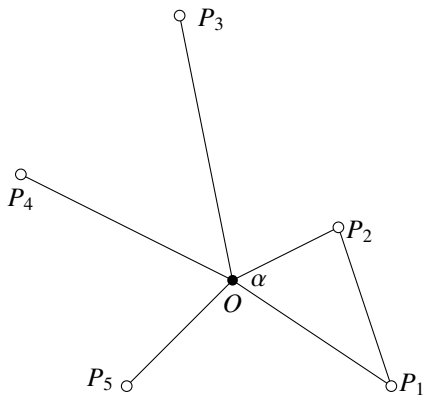


Abbildung 4.7:
Gymnasium Oesede 2000, Mündl. Teil, Aufg. 1, Lösung

P_1, P_2 etc. seien eine Reihe von Städten, für die O nächster Nachbar ist. Im Dreieck $\triangle OP_1P_2$ ist die Seite $\overline{P_1P_2}$ die längste Seite, länger als $\overline{OP_1}$ und als $\overline{OP_2}$. Also ist der Winkel $\alpha = \angle(P_1OP_2)$ der größte Winkel in $\triangle OP_1P_2$. Der größte Winkel im Dreieck ist größer als 60°, der Vollwinkel um O kann höchstens 5 solche Winkel enthalten.

Aufgabe 2 (Wer zuletzt kommt, den bestraft das Leben)

Julia sorgt in jedem Zug dafür, dass ein Stück mit gleich vielen Zeilen und Spalten übrig bleibt.

4.6 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2001

4.6.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Der Stern)

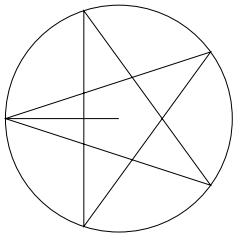


Abbildung 4.8:
Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium 2001, Schriftl. Teil, Aufg. 1, Lösung

Gesucht ist der Radius des Umkreises. Man findet für die Seite des Pentagramms die Formel

$$d = r \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2}} \ .$$

Aufgelöst nach r ergibt sich

$$r = d \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}} \ .$$

Setzt man hierin

$$d = \frac{400 \text{ cm}}{5} = 80 \text{ cm} \ ,$$

so erhält man

$$r \approx 42,06 \text{ cm} \ .$$

Aufgabe 2 (Fünfstellige Zahl raten)

a. Bezeichnen wir die Ziffern der Reihe nach mit x, y, z, u, v, so gewinnt man aus der vierten Bedingung die Gleichung

$$\begin{aligned}
28\,017 &= x + 10y \underline{+100z} + 1\,000u + 10\,000v \\
&\quad -10\,000x - 1\,000y \underline{-100z} + 10u + v\ , \\
28\,017 &= -9\,999x - 990y + 990u + 9\,999v\ , \\
3\,113 &= -1\,111x - 110y + 110u + 1\,111v\ , \\
3\,113 &= \underline{-1\,111x} - 110y + 110u \underline{+1\,111x} + 1\,111y\ , \\
3\,113 &= 1\,001y + 110u\ .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat unter den einstelligen Zahlen nur die Lösung $y = 3 \wedge u = 1$. Da y ungerade ist, kann nur x doppelt so groß sein wie u. Daraus folgt $x = 2$, $v = x + y = 2 + 3 = 5$ und die Lösungszahl heißt 23 815.

b. Verzichtet man auf die Bedingung $x + y = v$, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
3\,113 &= -1\,111x - 110y + 110u + 1\,111v\ , \\
3113 &= 1\,111(v - x) - 110(y - u)\ , \\
v - x = 3 &\quad \wedge \quad y - u = 2\ .
\end{aligned}$$

Die Bedingung $v - x = 3$ wird erfüllt von den 6 Zahlenpaaren $(x, v) = (1, 4), (2, 5), \ldots (6, 9)$. Die Bedingung $u - y = -2$ wird erfüllt von den 8 Zahlenpaaren $(y, , u) = (2, 0), (3, 1) \ldots (9, 7)$. In der Mitte sind alle 10 Ziffern möglich. Es gibt also $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ fünfstellige Zahlen, die die vierte Bedingung erfüllen.

Aufgabe 3 (Schulausflug)

Alle gehen dieselbe Strecke x km zu Fuß, und y km fahren sie im Bus.

$$x + y = 30\ .$$

Damit alle 78 Personen transportiert werden können, sind 10 Fahrten erforderlich.

Die erste Fahrguppe wird nach y Kilometern abgesetzt und geht den Rest zu Fuß. Die letzte Gruppe wird nach x Kilometern vom Bus aufgenommen und am Ziel abgesetzt. Vom Aufnehmen der ersten Gruppe bis zum Aufnehmen der letzten Gruppe fährt der Bus 9 Mal hin und zurück. In dieser Zeit ist die letzte Gruppe x km gelaufen und hat dazu $6x$ min benötigt. Der Bus hat bei der Hinfahrt y km und bei der Rückfahrt $y - \frac{1}{9}x$ km zu fahren, insgesamt also $18y - x$ km. (Dazu kommt dann noch eine letzte Fahrt von y km.) Dazu braucht er $18y - x$ min.

$$18y - x = 6x\ .$$

Die Gleichungen haben die Lösungen $x = 21,6$ km und $y = 8,4$ km. Der Weg dauert insgesamt $6 \cdot 21,4 + 8.4 = 138$ min.

Aufgabe 4 (Der große Würfel)

Der große Würfel enthält $7 \times\ 7 \times\ 7 = 243$ kleine Würfel. Mit Ausnahme von zwei einander gegenüber liegenden Seiten sind alls rot gestrichen. Dann bleiben $5 \times 5 \times 7 = 175$ kleine Würfel vollstandig weiß.

4.6.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Toilettenpapierrolle)

Wir behandeln die Rolle (ein winziges bisschen ungenau) als eine Zusammensetzung von konzentrischen Papier(hohl)zylindern der Dicke $0,025$ cm. Die äußeren Lagen haben Längen von

$$14 \cdot \pi,\ (14 - 0,05) \cdot \pi,\ (14 - 0,10) \cdot \pi$$

etc. Die Lage Nummer i hat die Länge

$$(14 - i \cdot 0,05) \cdot \pi;.$$

Alle Längen aufaddiert ergeben 2500 cm.

$$\begin{aligned} 2500 &= \sum_{i=0}^{n}(14 - i \cdot 0,05) \cdot \pi \,, \\ 2500 &= \left((n+1) \cdot 14 - \frac{n(n+1)}{2} \cdot 0,05\right) \cdot \pi \,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösung $n = 63$. (Die zweite Lösung ist unbrauchbar). Nach 64 Lagen ist die Hälfte der Rolle verbraucht. Ihr Durchmesser hat sich dabei um $64 \cdot 0,05 = 3,2$ cm auf 10,8 cm verringert.

Für den zweiten Teil der Aufgabe ersetzen wir in der Gleichung die 2500 cm durch 5000 cm und erhalten die Lösung $n = 157$. Durch vollständiges Abwickeln verringert sich der Durchmesser um $158 \cdot 0,05 = 7,9$ cm auf 6,1 cm.

Aufgabe 2 (Die Mütze)

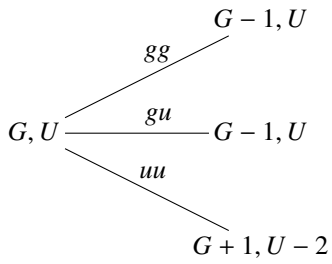


Abbildung 4.9:
Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium 2001, Mündl.. Teil, Aufg. 1
Lösung

Sei G die Anzahl der geraden, U die Anzahl der ungeraden Zahlen zu irgeneinem Zeitpunkt. Nach dem nächsten gezogenen Paar hat sich

entweder G um 1 verringert und U ist unverändert geblieben, oder G hat sich um 1 erhöht und U hat sich um 2 verringert. In der Mütze können also während des gesamten Vorgangs nur 5, 3 oder 1 ungerade Zahlen vorhanden sein. Die letzte Differenz ist ungerade.

4.7 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2002

4.7.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Erdbeeren)

Man rechnet vom Ende her zurück und erhält die Gleichung

$$\left[\left((x-56)\cdot\frac{3}{2}+2\right)\cdot\frac{3}{2}+2\right]\cdot\frac{3}{2}+1=x$$

mit der Lösung 76.

Aufgabe 2 (Dorfschullehrer)

$3\cdot 4\cdot 5 = 60$ ist durch 2, 3, 4, 5, 6 teilbar, dasselbe gilt für alle Vielfachen von 60. Fügt man noch 1 hinzu, bleibt beim Teilen immer 1 übrig. Von den so konstruierten Zahlen 61, 121, 181, 241, 301 ist 301 ist erste, die durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 3 (Vierecksfläche)

Dreieck $\triangle DCM_2$ ist gleichseitig, Seitenlänge r. Seine Höhe beträgt $\frac{r}{2}\sqrt{3}$. Das Trapez $ABCD$ hat die Fläche $\frac{1}{2}(4r+r)\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3}=\frac{5}{4}r^2\sqrt{3}$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AM_2D$ ergibt sich $|\overline{AD}|$ zu $r\sqrt{3}$. Das Trapez hat den Umfang $5r+2r\sqrt{3}$.

Aufgabe 4 (Eisenbahnnetz)

Theoretisch gibt es $1+2+3+4=10$ mögliche Verbindungen. Vier davon auszuwählen, gibt es $\binom{10}{4}=210$ Möglichkeiten.

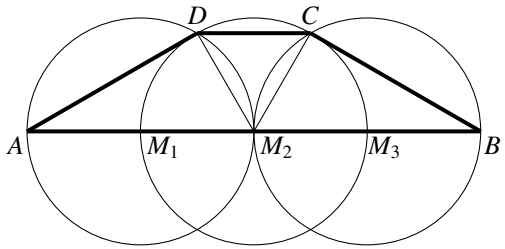


Abbildung 4.10:
Gymnasium „In der Wüste“ 2002, Schriftl. Teil, Aufg. 3 Lösung

4.7.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Felder besetzen)

Spielvariante 1: Wir betrachten Restklassen mod 3. Ist $n \in \overline{1}$ oder $n \in \overline{2}$, gewinnt der erste Spieler, indem er stets eine Anzahl aus $\overline{0}$ hinterlässt. Ist $n \in \overline{0}$, gewinnt der zweite Spieler mit derselben Taktik.

Spielvariante 2: Ist n ungerade, besetzt der erste Spieler das mittlere Feld, ist n gerade, die beiden mittleren Feldern. Danach setzt er seine Steine spiegelbildlich zum zweiten Spieler und gewinnt.

Aufgabe 2 (Summe vierstelliger Zahlen)

Aus den Ziffern 1 bis 4 lassen sich $4! = 24$ verschiedene Zahlen bilden. Schreibt man diese alle untereinander, kommt jede Ziffer in jeder Spalte 6-mal vor. Die Summe dieser Ziffern ist $6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 60$. Beachtet man auch noch die Überträge, kommt man auf die Summe 66660.

4.8 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2003

4.8.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Logical Lehrer)

Bolle	Knolle	Wolle
(nicht De)	(nicht Ma)	(nicht Bi, De)
Biologie	Deutsch	Mathematik
Freiburg	Heidelberg	Freiburg
länger a. d. S.	länger a. d. S.	neu a. d. S:

Aufgabe 2 (Sternchen)

10896108 : 12 = 908009

Aufgabe 3 (Fuenf Kreise)

Aus Abbildung 4.11 liest man ab $2x_2 = (2r)^2$, $x = r \cdot \sqrt{2}$. $R = r + x = r + r\sqrt{2} = r(\sqrt{2} + 1)$ formt man um zu

$$r = \frac{R}{\sqrt{2} + 1)} = R \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 0,414 \cdot R\ .$$

Aufgabe 4 (Tischtennisturnier)

Es gibt $\binom{18}{2} = 153$ verschiedene Paarungen.

4.8.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Kostümfest)

Marco kan zwischen $5{\cdot}2{\cdot}3{+}2{\cdot}2{\cdot}2 = 38$ verschiedenen Kombinationen wählen.

Aufgabe 2 (Abstandssumme)

Die Lösung entnimmt man Abbildung 4.12.

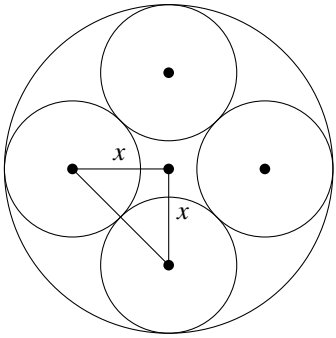


Abbildung 4.11:
Gymnasium Carolinum 2003, Schriftl. Teil, Aufg. 3 Lösung

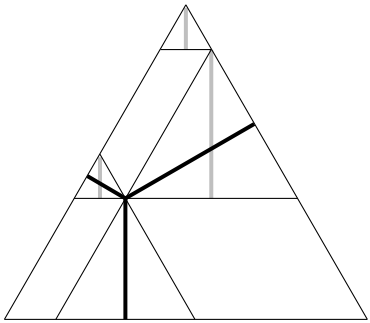


Abbildung 4.12:
Gymnasium Carolinum 2003, Mündl. Teil, Aufg. 2 Loesung

4.9 Gymnasium Bersenbrück 2004

4.9.1 Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Buntstifte)

Renate	Ute	Sabine	Tatjana	Summe	Quersumme
14	28	1	12	55	10
15	39	2	14	61	7
16	*32*	*3*	*16*	*67*	*13*
17	34	4	18	73	10
18	36	5	20	79	16
19	38	6	22	85	13

Aufgabe 2 (Schustermesser)

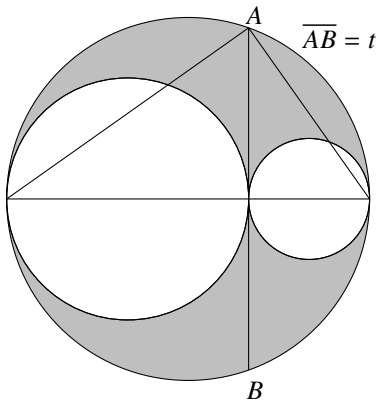


Abbildung 4.13:
Gymnasium Bersenbrück 2004, Schriftl. Teil, Aufg. 2

Die drei Radien seinen R (für den äußeren Kreis), r_1 und r_2, wobei $r_2 = R - r_1$ ist. Außerdem gilt nach dem Höhensatz

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{2}\right)^2 &= 2r_1 \cdot 2r_2 \\ &= 4r_1(R - r_1)\ ;16.7.1799 \\ r_1(R - r_1) &= \frac{t^2}{16}\ .\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die grau getönte Fläche

$$\begin{aligned}A &= \pi(R^2 - r_1^2 - r_2^2) \\ &= \pi(R^2 - r_1^2 - R^2 + 2Rr_1 - r_1^2) \\ &= 2\pi r_1(R - r_1) \\ &= \frac{1}{8}\pi t^2 \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Gauß-Verschlüsselung)

Datum	verschlüsselt	Bemerkung
16.7.1799	8113	
16.7.1796	7018	$-3 \cdot 365$
16.7.1795	6652	-366
16.7.1792	5557	$-3 \cdot 365$
16.3.1792	5435	$-30 - 31 - 30 - 31$
16.2.1792	5456	-29
16.12.1791	5344	$-31 - 31$
15.12.1791	5343	-1

Aufgabe 4 (Ungleichung)

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &> ab\,, \\ a+b &> ab\,, \\ b &> a(b-1)\,, \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Letzteres folgt aus $a > b$ und $b > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{a-1} &> a\,, \\ a+1 &> a(a-1)\,, \\ a-1 &= 1\,. \end{aligned}$$

Die gesuchten Zahlen sind $a = 2$ und $b = 1$.

4.9.2 Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Kormoraninsel)

Wir bauen das Straßennetz sukzessive auf (beginnend mit den Orten, die wir unbedingt verbinden wollen), siehe Abbildung 4.14. Wir starten mit drei Ortschaften. Die Verbindungsstraßen zerlegen die Kormoraninsel in zwei Teile, die durch 3 Kanten berandet werden. Wenn wir einen weiteren Punkt hinzunehmen, liegt der immer innerhalb eines solchen, durch drei Kanten berandeten Gebietes. Er kann also mit drei Punkten verbunden werden. Die Gesmtzahl der Straßen beträgt also bei n Orten

$$3 + (n-3) \cdot 3 = 3n - 6$$

Straßen, in Falle der Kormoraninsel sind das 18 Straßen.

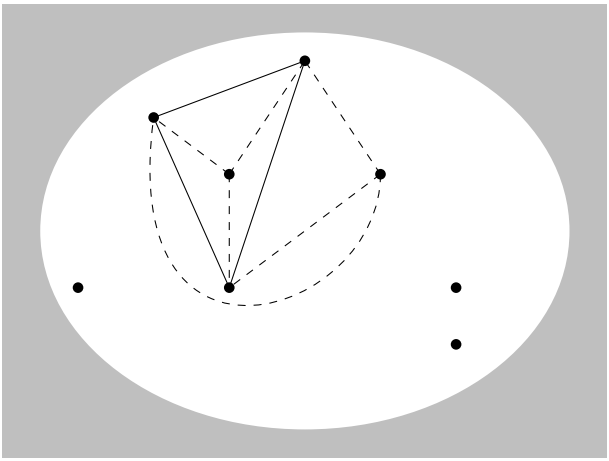


Abbildung 4.14:
Gymnasium Bersenbrück 2004, Mündl. Teil, Aufg. 1 Lösung

Aufgabe 2 (Tube)

Die Schichten zwischen dem Dreieck $\triangle ABS$ und dem tiefer liegenden Dreieck $\triangle A'B'S'$ sind Keile mit der Grundfläche g, der Höhe $h = |\overline{PP'}|$ und dem Volumen $\Delta V = \frac{1}{2}gh$ (siehe Abbildung 3.18). Das Gesamtvolumen ergibt sich durch Summation aller Schichten. Sie haben alle dieselbe Höhe h, ihr Grundflächen addieren sich zur Kreisfläche πr^2. Daraus folgt die Volumenformel

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h \ .$$

4.10 Gymnasium Bad Essen 2005

4.10.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Comic-Hefte)

Torsten hat x einzelne Mad-Hefte, y Dreierpacks Mickey-Mouse-Hefte und z Fünferpacks Witch-Hefte.

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 200 \text{ und} \\ 10y + 3y + 5z &= 200 \text{ bzw.} \\ 13y + 5z &= 200\ . \end{aligned}$$

Für y kommen offenbar nur Vielfache von 5 in Frage.

	Mickey-M.-Hefte	Mad-Hefte	Witch-Hefte
y	$3y$	$x = 10y$	Der Rest
5	15	30	155
10	30	100	70
15	45	150	5

Die letzte Zeile entfällt, da es *einige* Fünferbündel Witch-Hefte sein sollen. Lösungen sind die ersten beiden Tabellenzeilen.

Aufgabe 2 (Querprodukt)

Das Querprodukt 30 erhalte ich nur als $30 = 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, eventuell unter Hinzunahme weiterer Faktoren 1. Die Quersumme 12 lässt dann nur die Ziffern (1, 5, 6) bzw. (1, 1, 2, 3, 5) zu.

Damit eine Zahl durch 4 teilbar ist, müssen die letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl ergeben. Für (1, 5, 6) sind das die beiden Zahlen 156 und 516.

Nun zu (1, 1, 2, 3, 5). Bei den Endziffern 12 können die übrigen drei Ziffern davor in beliebiger Reihenfolge auftreten, das sind $3! = 6$ Möglichkeiten. Mit den Endziffern 32 haben wir drei Möglichkeiten (11532, 15132 und 51132) und entsprechend drei Möglichkeiten mit den Endziffern 52.

Insgesamt erfüllen 14 Zahlen die gestellten Bedingungen.

Aufgabe 3 (Kaninchen)

a. Jan - 1, Feb - 2, Mär - 3 , Apr - 5 ...
Die 5 kommt so zustande, dass die drei Paare aus dem März weiter da sind und die 2 Paare, die achon im Februar lebten, inzwischen mindestens zwei Monate alt sind und Nachkommen haben. So geht es weiter mit den Fibonacci-Zahlen: 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 233. Man addiert immer die vor-vorige zur vorhergehenden Zahl.

b. Die Anzahl der nach dem März (also im April) neugeborene Paare ist identisch mit dem Stand vom vor-vorigen Monat Februar. (Im April sind zwei Paare geboren worden.) es ist $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$ usw. Da es dieselben Zahlen sind wie im ersten Aufgabenteil, erhält man a_{100} als Summe von a_{98} und a_{99}.
Die Anzahl der neugeborenen Paare nach dem 100. Monat, kann man aufteilen in solche, deren Eltern 2 Monate alt sind, deren Eltern 3 Monate alt sind usw. ... und schließlich deren Eltern 98 Monate alt sind sowie dem Anfangspaar. Das ergibt

$$a_{100} = a_{98} + a_{97} + a_{96} + \ldots + a_2 + a_1 + 1 \ .$$

Aufgabe 4 (Hausfigur)

Wir zeigen die Kongruenz der hervorgehobenen Dreiecke $\triangle ABF$ und $\triangle DEG$.

$\triangle DEG$ ist gleichschenklig, der Scheitelwinkel misst 30°, jeder Basiswinkel 75°. Das gestreckte Dreick $\triangle EBC$ ist ebenfalls gleichschenklig, der Scheitelwinkel misst 150° und jeder Basiswinkel 15°.

Es ist $|\overline{AB}| = |\overline{DG}| = a$ und $\angle(ABF) = \angle(DGB) = 75^o$. Für die gestrichelt eingezeichneten Höhen gilt $h_E = h_F = \frac{a}{2}$. Die markierten Dreiecke sind kongruent, deshalb ist $|\overline{AF}| = |\overline{DE}| = a$, und weil $\triangle EBC$ gleichschenklig ist, ist auch $|\overline{DF}| = a$.

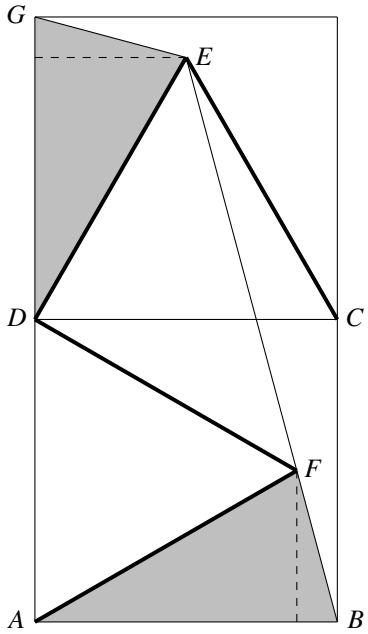


Abbildung 4.15:
Gymnasium Bad Essen 2005, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4, Lösung

4.10.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Logical Zeitreisen)

Die Zahlen geben eine mögliche Reihenfolge für das Ausfüllen der Tabelle an.

Zimmer	201	202	203	204	205
Name	G(7)	L(12)	H(14)	E(10)	R(6)
Getränk	W(2)	O(1)	K(8)	T(11)	A(3)
Gegenst.	LK(15)	KD(13)	RS(9)	FM(5)	Gl(4)

Aufgabe 2 (Tetraeder)

grün	*gelb*	*rot*
1	2	3
4	5	6
10	7	8
11	12	9

gelb gewinnt gegen *grün* bei den Wurfkombinationen (2,1, (5,1), (5,4), (7,1), (7,4), (12,1), (12,4), (12,10) und (12,11), das sind 9 von 16 möglichen Wurfkombinationen.

rot gewinnt gegen *gelb* mit den Kombinationen (3,2), (6,2), (6,5), (8,2), (8,5), (8,7), (9,2), (9,5) und (9,7).

grün gewinnt gegen *rot* mit den Kombinationen (4,3), (10,3), (10,6), (10,8), (10,9), (11,3), (11,6), (11,8) und (11,9).

4.10.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Alter)

Die Jahreszahl $x \cdot x$ ist eine Quadratzahl und muss in der Zukunft liegen. Die nächste solche Jahreszahl ist $2025 = 45 \cdot 45$. Dann ist Sandras Tante in diesem Jahr (2005) 25 geworden.

Die nächste Quadratzahl ist $2116 = 46 \cdot 46$. Aber sie kann ja nicht in 111 Jahren 46 werden.

Aufgabe 2 (Bastelbogen)

Tür und Fenster zeigen: A ist die Lösung.

Aufgabe 3 (Geheimzifferen)

Das Herz ist 4 oder 8, damit vier Herzen die Endziffer 2 produzieren. Das Kreuz steht für die 1, mit einem dreistelligen und drei zweistelligen Summanden komme ich nicht über 2000.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 9 & 8 \\
+ & & & 9 & 8 \\
+ & & & 9 & 8 \\
+ & & 8 & 1 & 8 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 2
\end{array}
$$

4.11 Greselius-Gymnasium Bramsche 2006

4.11.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Magische Kreise)

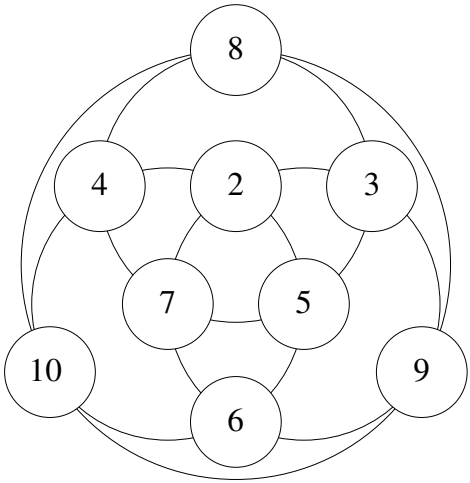


Abbildung 4.16:
Greselius-Gymnasium Bramsche 2006, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 1

Die Zahlen 2 bis 10 summieren sich zu 54. Jede ist an zwei Kreisen beteiligt, die Summe aller vier Kreise ist 108. Auf jedem Kreis beträgt die Summe 27. Der äußere Kreis enthält nur drei Zahlen: 8, 9, 10.

Die ungerade Summe 27 erfordert auf jedem Kreis eine ungerade Anzahl ungerader Summanden. Wir haben noch drei Kreise zu bedienen und dafür drei ungerade Zahlen zur Verfügung. Jede ist an zwei Kreisen beteiligt, das macht 6 Beteiligungen. Wenn im 8-Kreis oder im 10-Kreis drei ungerade Zahlen liegen, liegt eine davon gleichzeitig im 9-Kreis. Also sorgen wir dafür, dass zur 9 zwei ungerade Zahlen hinzutreten, zu

den beiden anderen eine bzw. dre8i.

1. Fall: Im 8-Kreis liegt nur eine ungerade Zahl, also 2, 4, 6, 7 und 8, im 10-Kreis 2, 3, 5, 7, 10. Da jede Zahl in genau zwei Kreisen auftaucht, bleiben für den 9-Kreis 3, 4, 5, 6, 9.

2. Fall: Im 10-Kreis liegt nur eine ungerade Zahl, also 2, 4, 5, 6, und 10 im 8-Kreis 3, 4, 5, 7, 8, im 9-Kreis 2, 3, 6, 7, 9.

Je zwei Kreise haben je zwei Zahlen gemeinsam, die unabhängig von den übrigen vertauscht werden können. Dadurch ergeben sich in jedem der genannten Fälle acht Unterfälle. Insgesamt können also die magischen Kreise auf 16 verschiedene Weisen ausgefüllt werden. Eine dieser Möglichkeiten ist abgebildet.

Aufgabe 2 (Tangentendreieck)

Man beginnt die Konstruktion mit der Strecke $\overline{AB}$. Senkrecht über A markiert man (in beliebiger Höhe) den Kreismittelpunkt M. Den zweiten Berührpunkt C konstruiert man in bekannter Weise mit Hilfe des Thaleskreises über $\overline{BM}$. D wird frei auf dem Kreisbogen zwischen A und C festgelegt, die zugehörige Tangente verläuft senkrecht zum Radius $\overline{MD}$.

Die Tangentenabschnitte $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$sind gleichlang, dasselbe gilt für die Abschnitte $\overline{FC}$ und $\overline{FD}$ sowie $\overline{EA}$ und $\overline{ED}$.

Dreieck $\triangle BEF$ hat den Umfang 16 cm.

Aufgabe 3 (Aufteilungsprobleme)

$$k + k + 1 + k + 2 + k + 3 + k + 4 + k + 5 + k + 6 = 7k + 21$$

Die Aufteilung in 7 gleich große Anzahlen ist machbar, da $7k+21$ durch 7 teilbar ist.

$$k + k + 1 + k + 2 + k + 3 + k + 4 + k + 5 = 6k + 15$$

Bei sechs Kindern geht das nicht, 15 ist nicht durch 6 teilbar.

$$\sum_{i=0}^{n-1}(k + i) = n \cdot k + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Aufteilung ist möglich bei ungeradem n und nicht möglich bei geradem n.

Aufgabe 4 (Drei Geraden)

Der Kreis möge die Geraden g_1 und g_2 berühren, sein Mittelpunkt auf g_3 liegen.

1. $g_1 = g_2$:
   1.1 $g_3 = g_1$: keine Lösung (oder nur die entartete mit dem Radius 0);
   1.2 $g_3 \neq g_1$: unendlich viel Lösungen.
2. $g_1 \parallel g_2$: Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf dem Schnittpunkt der Mittelparallelen m mit g_3.
   2.1 $g_3 = m$: unendlich viele Lösungen;
   2.2 $g_3 \parallel m$: keine Lösung;
   2.3 sonst: eine Lösung.

3: $\neg(g_1 \parallel g_2)$: Seien w_1 und w_2 die beiden Winkelhalbieren.
   3.1 $(g_3 = w_1) \vee (g_3 = w_2)$: unendlich viele Lösungen;
   3.2 $(g_3 \parallel w_1) \vee (g_3 \parallel w_2)$: eine Lösung;
   3.3: sonst: zwei Lösungen.

4.11.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Das Rechengenie)

$10x - x = 9x$ ist durch 9 teilbar, die Quersumme desgleichen. Also heißt es, die Ziffernsumme zur nächsten durch 9 teilbaren Zahl zu ergänzen.

Aufgabe 2 (Abwechslungsreiche Kost)

Wir nummerieren die Anteile entsprechend den Restklassen mod 4, 5, 7 bzw.3.

a. Es gibt 4 verschiedenen Beilagen, 5 Sorten Fleisch/Fisch, 7 Gemüse und 3 Nachspeisen. Die Zahlen 4, 5, 7, 3 sind teilerfremd, ihr kgV ist 420. Die Speisefolge wiederholt sich nach 420 Tagen.

b. 100 mod 4 = 0, 100 mod 5 = 0, 100 mod 7 = 2, 100 mod 3 = 1. Am 100. Tag werden Reis, Rind, Möhren und Kuchen serviert.

c. Die Speisen der ersten 7 Tage folgen dieser Tabelle:

Tag-Nr	Beilage	Fleisch /Fisch	Gemüse	Nachspeise
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	0
4	0	4	4	1
5	1	0	5	2
6	2	1	6	0
7	3	2	0	1

Am 7. Tag sind Beilage, Gemüse und Nachspeise wie verlangt, nur nicht das Gemüse. Ein solche Konstallation wiederholt sich alle $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ Tage. IMan fügt solange 60 zur Tageszahl hinzu, bis auch für das Gemüse passt. Das ist am 307. Tag der Fall: 307 mod 4 = 3, 307 mod 5 = 2, 307 mod 7 = 6, 307 mod 3 = 1.

d. Das kgV von 4, 6, 8 und 3 ist 24, das Menü wiederholt sich alle 24 Tage. Viele Kombinationen kommen nicht mehr zustande.

4.11.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Logelei)

	1	2	3	4	5
Mann	Thür.	Hesse.	Bay.	Nieds.	Sach.
	1	16	11	13	14
´Farbe	gelb	blau	rot	grün	weiß
	4	3	9	7	8
Tier	Katze	Pferd	Goldh.	**Kamel**	Hund
	23	6	21	24	15
Speise	Pizza	Spagh.	Fisch	Suppe	Kuchen
	5	22	20	14	18
Getränk	**Wein**	Tee	Milch	Kaffee	O-Saft
	12	17	2	10	19

Die Zahlen geben eine mögliche Reihenfolge für das Ausfüllen an.

Aufgabe 2 (Magische Kreise)

Man achtet darauf, dass die auf demselben Kreis einander gegenüberliegenden Zahlen sich zu 17 ergänzen. Das ergibt eine Vielzahl von Lösungen.

4.12 Gymnasium Bad Iburg 2007

4.12.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Der GBI-Würfel)

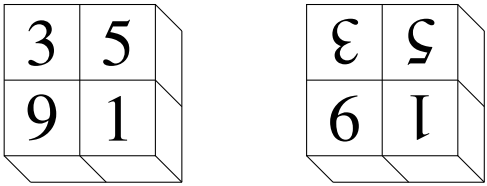


Abbildung 4.17:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 1, Lösung

a. Die Würfel sind einzeln zu drehen. Abbildung 4.17 zeigt links das Ergebnis bei Drehung um waagerechte, rechts um senkrechte Achsen.
b. Jeder Würfel hat die Augensumme 21, vier Würfel zusammen 84. Abzuziehen sind die 10 Augen auf der Vorderseite gemäß Abbildung 3.27 auf Seite 70 und die 15 Augen auf der Rückseite gemäß Abbildung 4.17, das ergibt 59.

Aufgabe 2 (Wiegeproblem)

3 Kreise auf der linken Seite werden aufgewogen durch 3 Kreuze und 3 Dreiecke rechts (Waage 2). Ich ersetze die 3 Kreuze durch 2 Quadrate (Waage 3) und diese wiederum durch 2 Kreise und 2 Dreiecke (Waage 1). Nimmt man jetzt auf beiden Seiten 2 Kreise weg, bleiben links 1 Kreis und rechts 5 Dreiecke.

Aufgabe 3 (Showdown auf dem Ferienhof)

Auf den festen Wegen braucht Ma 4,8 Sekunden:

$$\frac{24}{5} = 4,8\ .$$

Über die Wiese braucht Ma 6 Sekunden:

$$\begin{aligned} \sqrt{5^2 + 12^2} &= 13\ , \\ \sqrt{3^2 + 4^2} &= 5\ , \\ \frac{18}{3} &= 6\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Elf Freunde sollt ihr sein)

Das kgV von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 errechnet sich als $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$. Erst 2 521 lässt bei allen Divisionen durch 2, 3, 4 etc. genau den Rest 1 übrig. Aber 2 521 ist nicht durch 11 teilbar.

Wir bilden probeweise die Vielfachen von 2 520 und fügen 1 hinzu. Diese Zahlen lassen ebenfall bei Division durch 2, 3, 4 etc. stets den Rest 1 übrig. Irgendwann stoße ich dabei auf ein Vielfaches von 11: $10 \cdot 2\,520 + 1 = 25\,201 = 2\,291 \cdot 11$.

Also liegen dort 25 201 Steine herum, und jeder muss 2 291 Steine wegtragen.

Aber wie lange haben die wohl gebraucht, um die Steine zu zählen? Verzichtet man auf die Bedingung, dass der Rest immer genau 1 betragen muss, wären schon die 11 selber oder als nächste Zahl $11^2 = 121$ Lösungen.

4.12.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Partyspaß)

Trügen Claus und Robin grüne Mützen, wüsste Sarah Bescheid. Das wissen auch Klaus und Robin, also muss einer von ihnen eine eine rote

Mütze tragen. Sähe Claus eine grüne Mütze vor sich, hätte er selbst die rote auf dem Kopf. Offenbar sieht er eine rote Mütze, und das weiß auch Robin.

Aufgabe 2 (Aprilwetter)

An der letzten Stelle kommt es zum Übertrag. Außerdem darf weder E noch N den Wert 9 bekommen. Demzufolge kommt für L nur eine der Zahlen 0, ... , 5 in Frage. Versucht man es mit L = 0, E = 2 und N = 8, so kommt man auf die Lösung 42528 + 36882 = 70410.

4.12.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Holzwürfel, einfarbig)

mindestens 13

1	1	2
1	0	2
2	1	3

höchstens 16

2	1	2
2	1	2
2	1	3

Abbildung 4.18:
Gymnasium Bad Iburg 2007, Klasse 5 – 6, Aufg. 1, Lösung

Aufgabe 2 (Die Reise ins Land der Knobolde)

A, B, C sind die Hexen wie abgebildet, e, u und l ihre Eigenschaften „ehrlich“, „unentschieden“ und „lügnerisch“. Ich stelle alle denkbaren Konstellationen zusammen und begründe gegebenenfalls, warum sie nicht in Betracht kommen.

A	B	C	Bemerkung
e	u	l	A sagt die Unwahrheit
e	l	u	A sagt die Unwahrheit
u	e	l	B sagt die Unwahrheit
u	l	e	
l	e	u	B sagt die Unwahrheit
l	u	e	C sagt die Unwahrheit

Aufgabe 3 (Wiegeproblem II)

Wir legen im mittleren Bild auf jeder Seite noch 3 Würfel dazu. Dann ist links der Zustand des ersten Bildes hergestellt, rechts sind 4 von von 12 Kugeln durch 4 Würfel ersetzt. Eine Würfel wiegt soviel wie eine Kugel. 9 Kugeln wiegen Das Glücksschwein auf.

4.13 Ratsgymnasium Osnabrück 2008

4.13.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Defekter Fahrstuhl)

a. Da man vom 1. Stockwerk aus das 72. erreichen will, muss man 71 Stockwereke aufsteigen. Wir denken uns „virtuelle“ Stockwerke hinzu, und zwar Vielfache von 9, solange bis wir eine durch 7 teilbare Anzahl erhalten. Das ist bei der Zahl 98 der Fall. Wir steigen also insgesamt 14-mal um jeweils 7 Stockwerke auf und zwischendurch insgesamt 3-mal um jeweils 9 Stockwerke ab.
b. (siehe c))
c. Die diophantische Gleichung $7k - 9m = 71$ hat, wie wir gesehen haben, die spezielle Lösung $(k = 14; m = 3)$. Wir können natürlich zwischendurch nach Herzenslust rauf und runter fahren, nur müssen sich die Zusatzfahrten unteeinander ausgleichen. Das ist gewährleistet, wenn die Zahl der zusätzliche in jeder Richtung zurückgelegte Strecke ein Vielfaches sowohl von 7 wie von 9 ist. Die allgemeine Lösung lautet

$$k = 14 + 9 \cdot i; m = 3 + 7 \cdot i; i \in \mathbb{N}_0 \ .$$

d. Mit der Tastenfolge *ggggrggggrggggrgg* ereicht man nacheinander die Stockwerke 8, 15, 22, 29, 20, 27, 34, 41, 48, 39, 46, 53, 60, 67, 58, 65, 72.

Aufgabe 2 (Würfel mit Dreieck)

$$\begin{aligned} |\overline{DJ}| &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{3} \ ; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{DM}| &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{13}}{3}\ ; \\
|\overline{JM}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{19}}{3}\ ; \\
U &= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{19}}{3} \\
&\approx 3,7089\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (Heuvorrat)

Die Tagesration einer Kuh sei k, eines Schafes s und einer Ziege z. Außerdem sei h der gesamte Heuvorrat.

$$
\begin{aligned}
135k + 135s &= h \mid \cdot 4 \\
180k + 180z &= h \mid \cdot 3 \\
270s + 270z &= h \mid \cdot 2 \\
540k + 540s &= 4h \\
540k + 540z &= 3h \\
540s + 540z &= 2h \\
1080k + 1080s + 1080z &= 9h \mid : 9 \\
120k + 120s + 120z &= h\ .
\end{aligned}
$$

Der Heuvorrat hat für alle Tiere 40 Tage gereicht.

Aufgabe 4 (Tablettenfilm)

6 aus 10 Feldern auszuwählen, gibt es $\binom{10}{6} = 210$ Möglichkeiten. Unter den Mustern, die in jeder Reihe 3 Tabletten enthalten, gibt es einige, die bei Drehung in sich selbst übergehen. Genau betrachtet, gibt es zu jeder Verteilung der 3 Tabletten in der oberen Reihe eine solche Konstellation, Das ist $\binom{5}{3} = 10$ Mal der Fall. Die übrigen 200 Fälle treten doppelt auf, sind aber nur jeweils einmal zu zählen. Es gibt also $10 + 200 : 2 = 110$ verschiedenen Muster.

4.13.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Eisenbahnbrücke)

Aus der Zahl der Achsen schließt man, dass der Zug aus der Lok und 30 Wagen á 15 m besteht. Der Zug ist also 475 m lang.

Sei b die Länge der Brücke und v die Geschwindigkeit des Zuges.

$$v = \frac{450}{25} ,$$

der Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 18 m/s.

$$\begin{aligned} 18 &= \frac{b+25}{32} , \\ 576 &= b + 25 , \\ b &= 551 . \end{aligned}$$

Die Brücke ist 551 m lang,

Aufgabe 2 (Grausame Tierwelt)

Hier kommt man nur durch, wenn man die Entwicklung der Populationen ganz akribisch zurückverfolgt. In der folgenden Tabelle sind die Anzahlen *vor* der jeweiligen Änderung aufgeführt. Für die Lösung der Aufgabe muss man sich die Tabelle von unten nach oben entwickelt denken.

Zeitpunkt		Wölfe	Schafe	Schlangen
1. Tag	morgens	145	378	232
	mittags	145	88	232
	abends	145	88	56
2. Tag	morgens	33	88	56
	mittags	33	22	56
	abends	33	22	12
3. Tag	morgens	9	22	12
	mittags	9	4	12
	abends	9	4	4
4. Tag	morgens	1	4	4
	mittags	1	2	4
	abends	1	2	0
5. Tag	morgens	1	2	0
	mittags	1	0	0
	abends	1	0	0
6. Tag	morgens	1	0	0

4.13.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Spiegelsumme)

a. Die Spiegelsumme von 13 ist $13+31 = 44$, von 37 ist sie $37+73 = 110$.
b. Sei x die Zehnerziffer, y die Einerziffer der Ausgangszahl. Wir bilden die Spiegelsumme: $10x+y+x+10y = 11x+11y = 11(x+y)$. Die Spiegelsumme ist das 11-Fache der Quersumme.
c. Eine Spiegelsumme kleiner 45 haben alle zweistelligen Zahlen mit einer Quersumme kleiner gleich 4, nämlich 00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 31 und 40.
d. Bei den zweistelligen Zahlen ist die häufigste Quersumme 9, entsprechend ist die häufigste Spiegelsumme 99.
e. Alle Zahlen von 00 bis 99 ergeben addiert $(99 \cdot 100) : 2 = 4950$. Die Spiegelzahlen haben dieselbe Summe, die Spiegelsummen al-

so $2 \cdot 4950 = 9900$.

Aufgabe 2 (Schnittpunkte)

Zwei Quadrate haben bis zu 8 Schnittpunkte, ebenso ein Quadrat und ein Kreis. Das macht hier bis zu 24 Schnittpunkte. Bei etwas Sorgfalt sollte sich das auch zeichnen lassen (s. Abb. 4.19).

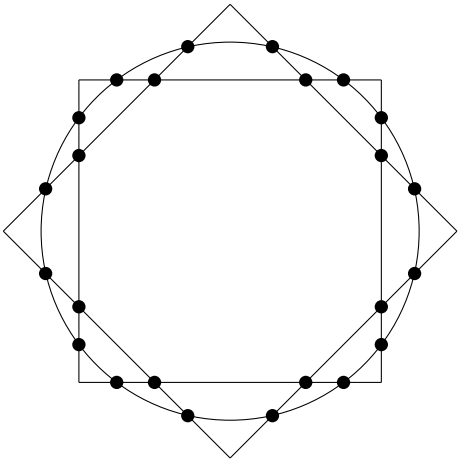


Abbildung 4.19:
Ratsgymnasium 2008, Klasse 5 – 6, Aufg. 2, Loesung

Aufgabe 3 (ABCD)

a. Für die 4 Buchstaben gibt es $4! = 24$ verschiedenen Anordnungen:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

b. Nicht möglich sind die 8 Buchstabenfolgen:

ACBD	BCDA	CADB	DACB
ADBC	BDAC	CBDA	DBCA

c. Beim Ring sind die 8 Buchstabenfolgen aus Aufgabenteil b. ebenfalls nicht möglich. Hinzu kommen 8 weitere:

ABDC	BACD	CABD	DBAC
ACDB	BDCA	CDBA	DCAB

4.14 Ursulaschule Osnabrück 2009

4.14.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Holzwürfel, mehrfarbig)

Die 64 Würfel haben $64 \cdot 6 = 384$ Oberflächenquadrate. Alle haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. 8 Würfel haben drei weiße Flächen, 24 haben zwei weiße Flächen, 24 haben eine weiße Fläche, der Rest gar keine. Insgesamt gibt es $8 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 96$ weiße Quadrate. Die Wahrscheinlichekeit für ein weißes Quadrat ist

$$\frac{96}{384} = \frac{1}{4}\,.$$

Die Aufgabe kann auch als zweistufiges Experiment betrachtet und mit einem Baumdiagramm gelöst werden.

Aufgabe 2 (Dreieck im Quadrat)

Das Quadrat sei $ABCD$, seine Seitenlänge a, ein Dreieck XYZ, dessen Flächeninhalt F.

Fall 1: Es gibt eine Quadratseite, die zwei der Punkte X, Y, Z enthält. Die Dreiecksseite zwischen diesen beiden Punkten hat eine Länge von höchstens a, die darauf senkrecht stehende Höhe ebenfalls, also gilt $F \leq a^2$. .

Fall 2: (siehe Figur 4.20) Jede Quadratseite enthält höchstens einen der Punkte X, Y, Z. Weil Ecken zu zwei Seiten gehören, muss es mindestens 2 Punkte geben, die keine Ecken sind und auf benachbarten Quadratseiten liegen. O. B. d. A. liege X auf $\overline{BC}$, Y auf $\overline{CD}$ und Z auf $\overline{AB}$ (die Skizze zeigt den Extremfall $A = Z$). Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch X zerlegt das Quadrat in zwei Teilrechtecke. Jedes Teildreieck hat eine Höhe, die gleich der Höhe (Seitenlänge) des Teilrechtecks ist. Die Grundseite $\overline{XE}$ in jedem Teildreieck ist kleiner als a, weil Y kein Eckpunkt ist. Damit hat jedes Teildreieck eine Fläche, die kleiner als die halbe Fläche des Teilrechtecks ist. Also hat das Dreieck XYZ eine Fläche, die kleiner als die halbe Quadratfläche ist.

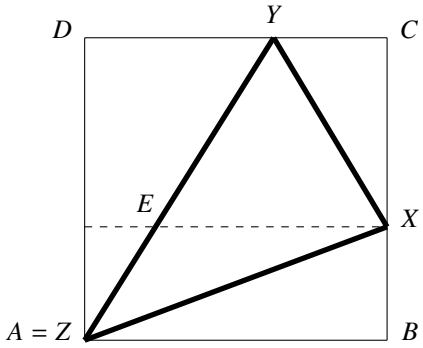


Abbildung 4.20:
Ursulaschule 2009, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2, Lösung

c

Aufgabe 3 (Sechsstellige Zahlen)

a. Es sind

$$\begin{aligned} ababab &= ab \cdot 101010 = ab \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \text{ und} \\ cdecde &= cde \cdot 1001 = cde \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13\,. \end{aligned}$$

$7 \cdot 13 = 91$ ist gemeinsamer Teiler von *ababab* und *cdecde*. So groß ist also mindestens der ggT.

b.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{ababab}{cdecde} \\ &= \frac{ab \cdot 10101}{cde \cdot 1001} \\ &= \frac{ab \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37}{cde \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \\ &= \frac{ab \cdot 111}{cde \cdot 11} \end{aligned}$$

Da 11 und 111 teilerfremd sind, muss, damit die Division ohne Rest aufgeht, *cde* ein Teiler von 111 sowie dreistellig und *ab* ein Vielfaches von 11 sein. Der Bruch lautet dann

$$\frac{aaaaaa}{111111} = a\,.$$

Aufgabe 4 (Die zerbrochene Fensterscheibe)

Nadine und Frank sagen Gegensätzliches aus, deshalb sagt genau einer von ihnen die Wahrheit, alle anderen sagen somit die Unwahrheit. Insbesondere ist Günthers Aussage falsch. Deshalb hat Anja Recht damit, dass Günthers Aussage nicht stimmt. Weil sie eine Lügnerin ist, ist dann aber der zweite Teil ihrer Aussage falsch, d. h. Anja hat die Scheibe zerbrochen.

4.14.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Fußball)

a. An jeder Ecke stoßen drei Teilflächen aneinander. Das ergibt $\frac{1}{3} \cdot (12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 60$ Ecken. Jede Kante ist an zwei Teilflächen beteiligt. Deshalb gibt es $\frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 90$ Kanten.
b. Von jeder Ecke gehen (59-3) Diagonalen aus, jede verbindet zwei Ecken miteinander. Also gibt es insgesamt $\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot (59 - 3) = 1680$ Diagonalen. Ein 6-Eck hat 9 Diagonalen, ein 5-Eck hat 5 Diagonalen. Der Fußball hat deshalb $12 \cdot 5 + 20 \cdot 9 = 240$ Flächendiagonalen und $1680 - 240 = 1440$ Raumdiagonalen.

Aufgabe 2 (Gartenbeete)

Die Beete können in folgender Reihenfolge zugeordnet werden (siehe Abb. 4.21):

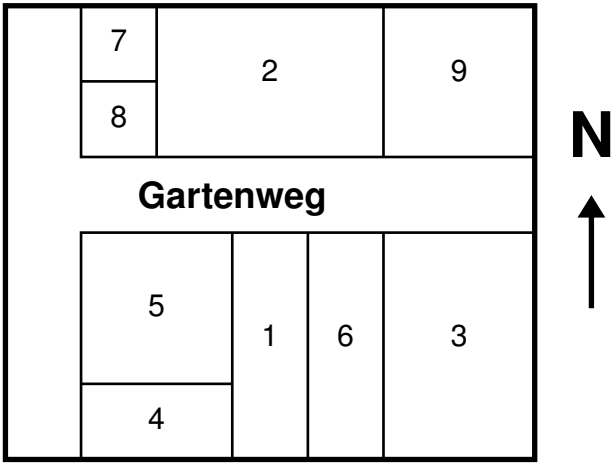


Abbildung 4.21:
Ursulaschule 2009, Klasse 7 - 10, Mündl. Teil, Aufg. 2, Lösung

1. Kohl
2. Kartoffeln
3. Tomaten
4. Lauch
5. Radieschen
6. Möhren
7. Bohnen
8. Petersilie
9. Erbsen

4.14.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Altersrätsel)

Wir denken uns die Aussagen nummeriert. Aus (3) und (4) folgt: Bernd ist 3 Jahre alt. Wegen (2) ist Christian 5 Jahre und wegen (3) Agnes 8 Jahre alt. In drei Jahren ist Herr Depuhl $4 \cdot (8 + 3) = 44$, jetzt demnach 41 Jahre alt, und Frau Depuhl ist 2 Jahre jünger, also 39.

Aufgabe 2 (Zahlenrätsel)

Dorotheas Zahl ist Vielfaches von 2, 3 und 5, also Vielfaches von 30. In Frage kommen 120, 150 und 180. Sie soll nicht durch 4 oder 9 teilbar sein, bleibt die 150.

Ernsts Zahl ist aus den einstelligen Primzahlen 3 und 7 zu bilden. Die 2 und die 5 lassen sich ausschließen, weil weder Ernsts Zahl noch ihre Spiegelzahl darauf enden dürfen. 37 ist die Lösung.

Für Fannys Zahl stellen wir eine Tabelle aller zweistelligen Primzahlen auf mit den Spaltenbezeichnungen P = „Primzahl“, 4*ZZ = „Vierfaches der Zehnerziffer“, 5*EZ = „Fünffaches der Einerziffer“, Su = „Summe der beiden Letzgenannten“. Man erkennt als gesuchte Zahl die 23.

P	4*ZZ	5*EZ	Su
11	4	5	9
13	4	15	19
17	4	35	39
19	4	45	49
23	8	15	**23**
29	8	45	53
31	12	5	17
37	12	35	47
41	16	5	21
43	16	15	31
47	16	35	51
53	20	15	35

P	4*ZZ	5*EZ	Su
59	20	45	65
61	24	5	29
67	24	35	59
71	28	5	33
79	28	45	73
83	32	15	47
89	32	45	77
97	36	35	71

Aufgabe 3 (Achteckzerlegungen)

Zu den Aufgabenteilen 1 bis 3 siehe Abbildung 4.23.

Teil 4: Die Achteckfigur setzt sich gemäß Abbildung 4.22 aus 7 Teilstücken zu jeweils vier Kästchen bzw. 4cm^2 zusammen. Ihre Fläche beträgt 28cm^2. Soll die halbe Fläche $31,5\text{cm}^2$, die ganze also 63cm^2 betragen, müssen die Teilquadrate 9cm^2 enthalten, die gesuchte Strecke 3cm lang sein.

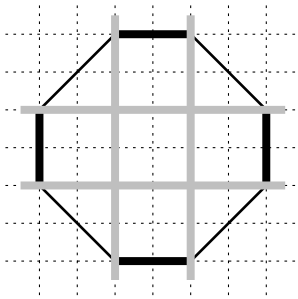


Abbildung 4.22:
Ursulaschule 2009, Klasse 5 – 6, Aufg. 3, Teil 4, Lösung

Soll die Gesamtfläche $8 \cdot 31,5\text{cm}^2 = 252\text{cm}^2$ umfassen, ist jede der sieben Teilflächen $252\text{cm}^2 : 7 = 36\text{cm}^2$ groß und die gesuchte Strecke 6cm lang.

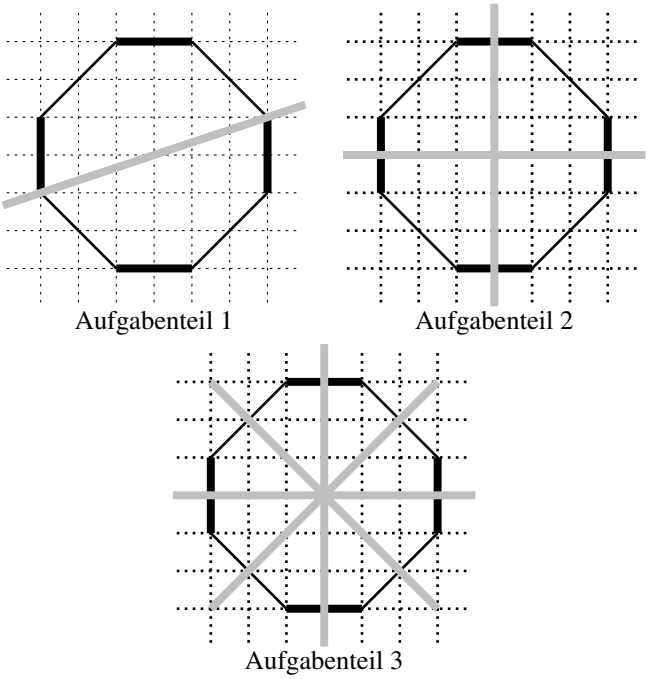


Abbildung 4.23:
Ursulaschule 2009, Klasse 5 – 6, Aufg. 3, Teil 1 – 3, Lösung

4.15 Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück 2010

4.15.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Natürliche Zahlen gesucht)

Es gibt *teilerfremde* natürliche Zahlen r und s mit $s < r \leq 2s$ und

$$\begin{aligned} 36r + 36s &= 324\,, \\ r + s &= 9\,. \end{aligned}$$

Das trifft nur auf das Paar (5; 4) zu, denn (6; 3) ist nicht teilerfremd. Die gesuchten Zahlen sind $x = 180$ und $y = 144$.

Aufgabe 2 (Ansichtssache)

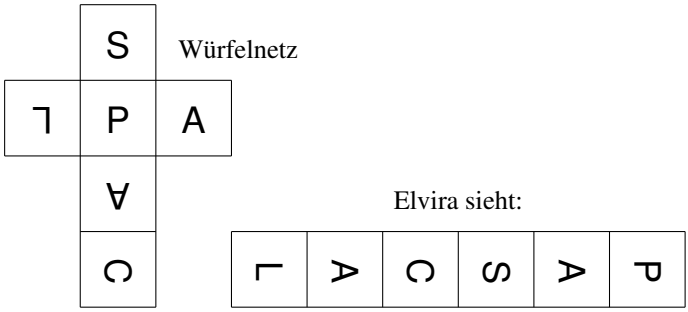


Abbildung 4.24:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 7– 10, Schriftl. Teil, Aufg. 2, Lösung

Man zeichnet sich ein mögliches Würfelnetz auf, faltet einen Würfel und legt ihn entsprechend (siehe Abb, 4.24).

Aufgabe 3 (Dreieck aus Dreieck)

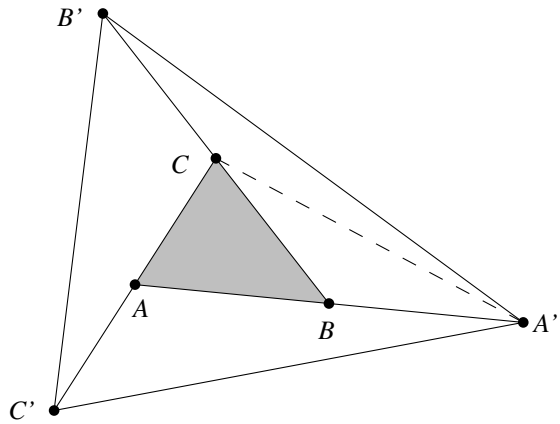


Abbildung 4.25:
Graf-Stauffenberg-Gymnasium 2010, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3

ΔABC und $\Delta BA'C$ sind flächengleich – Hinweis: $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BA'}\right|$. $\Delta CBA'$ und $\Delta B'CA'$ sind flächengleich – Hinweis: $\left|\overline{CB}\right| = \left|\overline{CB'}\right|$. Entsprechend argumentiert man für den Rest der Figur. Die gesamte Figur enthält die Fläche des inneren ΔABC siebenmal.

Aufgabe 4 (Versenkt)

Das Aquarium habe die Grundkanten a und b. Die Wassermenge errechnet sich im ersten Fall al $a \cdot b \cdot 10 - 10^3$, im zweiten Fall als $a \cdot b \cdot 20 - 20^3$. Die Wassermenge ändert sich nicht, deshalb gilt die Gleichung

$$10ab - 1000 = 20ab - 8000\,.$$

Daraus folgt $ab = 700$. 700 hat die Teiler 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50, 70, 100, 175, 350 und 700, die paarweise multipliziert wieder 700 ergeben. Da sowohl a als auch b mindestens 20cm lang sein

müssen, erhalten wir die beiden Lösungen (a = 20cm; b = 35cm) und (a = 25cm; b = 28cm).

4.15.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Wettkampfeinlauf)

Da die Vermutung des Sportlehrers, ADBC, in zwei Fällen mit dem wirklichen Einlauf übereinstimmte, können die folgenden sechs Möglichkeiten auftreten. Diese werden dann auf die Bedingungen, die bei CBAD auftreten, untersucht.

Zieleinlauf	Übereinstimmung mit CBAD
ADCB	AD Reihenfolge gleich
ACBD	D Einlaufplatz gleich
ABDC	B Einlaufplatz gleich
CDBA	C Einlaufplatz gleich
BDAC	A Einlaufplatz gleich

Zieleinlauf	Übereinstimmung mit CBAD
DABC	kein Einlaufplatz gleich, keine Reihenfolge gleich

Somit ist DABC die gesuchte Wettkampfeinlaufreihenfolge.

Aufgabe 2 (Die Admin-Passwörter zur GSG-Homepage)

Für jede Paarung von zwei Administratoren muss es ein Passwort geben, dass beiden nicht bekannt ist. Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ solche Paarungen und ebensoviele Passwörter. Eine tabellarische Übersicht mag das veranschaulichen. Dabei seien A, B, C, D, E die Administratoren, die Passwörter seien durch die Zahlen 1 bis 10 repräsentiert. „1“ bedeutet, dass der Administrator das Passwort kennt, „**1**“, dass er es nicht kennt.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	**1**	1	1	1
2	2	**2**	2	2
3	3	3	**3**	3
4	4	4	4	**4**
5	**5**	**5**	5	5
6	**6**	6	**6**	6
7	**7**	7	7	**7**
8	8	**8**	**8**	8
9	9	**9**	9	**9**
10	10	10	**10**	**10**

4.15.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Sechsecke im Sechseck)

a. Figur C besteht aus 54 kleinen Dreiecken.
b. Wir bezeichnen der Kürze halber als „1er-Sechseck“ ein Sechseck mit der Seitenlänge 1 etc. Im Inneren von Figur C liegen 19 Eckpunkte. Jeder ist Mittelpunkt eines 1er-Sechsecks.
c. Die Mittelpunkte der 2er-Sechsecke liegen vom Rand mindestens zwei Dreiecksseiten entfernt, davon gibt es in Figur C 7 Stück.
d. *Zu Frage 1:* In jedem $n$er-Sechseck liegen außen $6n$ Eckpunkte. Ein 7er-Sechseck hat

$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 1 = 169$$

Dreiecks-Ecken. Lassen wir die außenliegenden weg, bleiben $169 - 42 = 127$ Mittelpunkte der 1er-Sechsecke übrig. Lassen wir von dem verbleibenden 6er-Sechseck die außenliegenden weg, bleiben $127 - 36 = 91$ Mittelpunkte der 2er-Sechsescke übrig. Durch Fortdetzung dieses Verfahrens erhalten wir $91 - 30 = 61$ Mittelpunkte für 3er-Sechsecke, $61 - 24 = 37$ Mittelpunkte für 4er-Sechsecke, $37 - 18 = 19$ Mittelpunkte für 5er-Sechsecke,

$19 - 12 = 7$ Mittelpunkte für 6er-Sechsecke, und das umfassende 7er-Sechseck ist ja auch noch da.
Zu Frage 2: Durch Verallgemeinerung der Verhältnisse in Figur C erhalten wir die Gesamtzahl der kleinen Dreiecke im 7er-Sechseck als

$$\begin{aligned} & [(7+8)+(8+9)+(9+10)+(10+11) \\ & +(11+12)+(12+13)+(13+14)] \cdot 2 \\ = \; & 294\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Drei indische Götter)

A, B, C sind die drei Götter wie abgebildet, e, d und l ihre Eigenschaften „ehrlich“, „diplomatisch“ und „lügnerisch“. Ich stelle alle denkbaren Konstellationen zusammen und begründe gegebenenfalls, warum sie nicht in Betracht kommen.

A	B	C	Bemerkung
e	d	l	A sagt die Unwahrheit
e	l	d	A sagt die Unwahrheit
d	e	l	B sagt die Unwahrheit
d	l	e	
l	e	d	B sagt die Unwahrheit
l	d	e	C sagt die Unwahrheit

Aufgabe 3 (Oster-Kaninchen im Zoo)

a. Am Ende jeder Woche leben so viele Jungtier-Paare, wie Alttier-Paare in der Vorwoche. Am Ende jeder Woche leben so viele Alttier-Paare, wie in der Vorwoche Alt-und Jungtier-Paare zusammen.

Nach Woche	Alttier-Paare	Jungtier-Paare
Start	4	6
1	10	4
2	14	10
3	24	14

b. Wir machen dasselbe mit unbekannten Anfangszahlen x und y.

Nach Woche	Alttier-Paare	Jungtier-Paare
Start	x	y
1	$x + y$	x
2	$2x + y$	$x + y$
3	$3x + 2y$	$2x + y$
4	$5x + 3y$	$3x + 2y$
5	$8x + 5y$	$5x + 3y$

Nach fünf Wochen sind $13x + 8y = 105$ Kaninchenpaare vorhanden . Die einzige ganzzahlige Lösung dieser Gleichung ist, wie man durch Nachprüfen bestätigt, $(x = 5;\ y = 5)$.

4.16 Gymnasium Melle 2011

4.16.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Holzquadrate)

Man gewinnt – etwa mit Hilfe eines Baumdiagramms – die Gleichung

$$\begin{aligned} 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot x &= 0,25 \\ x &\approx 0,0143 \end{aligned}$$

1,43% der großen Quadrate sind blau.

Aufgabe 2 (Drei Töchter)

Wir erfassen die möglichen Jahre der drei Töchter in einer Tabelle. Dabei muss das Produkt stets 36 betragen. Eine vierte Spalte weist die Summe der Lebensalter aus.

1. T.	2. T.	3. T.	Summe
36	1	1	38
18	2	1	21
9	4	1	14
9	2	2	**13**
6	6	1	**13**
6	3	2	11

Da nach Kenntnis der Summe noch Ungewissheit besteht, muss diese Summe 13 betragen. Weil es aber eine älteste Tochter geben soll, bleibt nur die Lösung (9; 2; 2) übrig.

Aufgabe 3 (Teilbar durch 5?)

Die ersten Potenzen von 3 lauten $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 91, 3^5 = 273 \ldots$, ab da wiederholen sich die Endziffern. Wenn der Exponent ein Vielfaches von 4 ist, endet die Potenz auf 1, so auch bei 3^{4444}. Die ersten Potenzen von 4 lauten $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64 \ldots$, ab da wiederholen sich die Endziffern. Wenn der Exponent ungerade

ist, endet die Potenz auf 4, so auch bei 4^{3333}. Die Summe endet auf 5 und ist mithin durch 5 teilbar.

Aufgabe 4 (Dreieckskonstruktion)

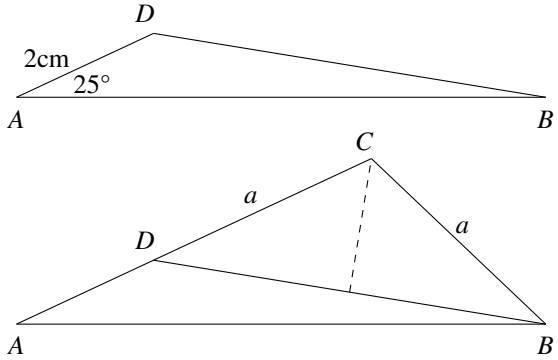


Abbildung 4.26:
Gymnasium Melle, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4, Lösung

(Siehe Abb. 4.26) Man beginnt mit dem Teildreieck ABD, dieses ist eindeutig konstruierbar. Punkt C findet man mit Hilfe der Mittelsenkrechten auf $\overline{AD}$, das ist ebenfalls eindeutig.

4.16.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Blindenschrift und ihre Codierung)

a. 6 Punkte in zwei Zuständen kodieren $2^6 = 64$ verschiedene Zeichen.
b. Deutsche Texte enthalten 26 Buchstaben plus 3 Umlaute, alle in Groß- und Kleinschreibung, dazu kommt das „ß“, dazu kommen die 10 Ziffern, dazu kommen eine Reihe von Interpunktionszeichen. Damit wird die Anzahl 64 deutlich überschritten.

Aufgabe 2 (Was sind das für Zahlen?)

a. Sei n die Zeilennummer. Die letzte Zahl einer Zeile ist n^2. Die erste Zahl einer Zeile ist $(n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.
b. Die Anzahl der Zahlen in einer Zeile ist $n^2 - (n-1)^2$, also ungerade. Die mittlere Zahl ist das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endzahl $(n^2 - 2n + 2 + n^2)/2 = n^2 - n + 1$.
c. Nach b. ist die mittlere Zahl der 100. Zeile $100^2 - 100 + 1 = 9901$.
d. 2011 liegt zwischen den Quadratzahlen $44^2 = 1936$ und $45^2 = 2025$, es steht in der 45. Zeile. Die Zahlen bis 1936 stehen vor der 45. Zeile. Unsere Zahl steht an der Position $2011 - 1936 = 75$.

4.16.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Beinezahl)

Anzahl	wer?	Beine
1	Peter	2
1	Ina	2
1	Struppi	4
4	Katzen	16
$4 \cdot 3 = 12$	junge Katzen	48
4	Mausepärchen	32
$4 \cdot 6 = 24$	junge Mäuschen	96
	insgesamt	200

Aufgabe 2 (Holzleiter)

a. Die Leiter hat mindestens 7 (und höchstens 8) Sprossen.
b. Man benötigt für die Sprossen $7 \cdot 0.45\text{m} = 3.15\text{m}$ Holzlatten, für die Holme $2 \cdot 2,40\text{m} = 4,80\text{m}$ Kanthölzer.

Aufgabe 3 (Seitenzahlen)

Von Seite 1 bis 9 gibt es 9 einstellige Zahlen, das macht 9 Ziffern, von Seite 10 bis 99 gibt es 90 zweistellige Zahlen, dazu benötigt man weitere 180 Ziffern, von Seite 100 bis 999 gibt es 900 dreistellige Seitenzahlen

mit 2700 Ziffern. Für die vierstelligen Zahlen ab Seite 1000 bleiben $6937 - 9 - 180 - 2700 = 4048$ Ziffern übrig. Das reicht für weitere $4048 : 4 = 1012$ Seiten. Das Buch hat demnach $999 + 1012 = 2011$ Seiten.

4.17 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Osnabrück 2012

4.17.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Hellseher)

a. $32 \cdot 2 + 5) \cdot 50 - 365 + 115 = 3556$.
b. Sei x das Alter des Menschen, y der Inhalt seines Geldbeutels.

$$(2x + 5) \cdot 50 + y - 365 + 115 = 100x + y \ .$$

Durch das Multiplizieren mit 100 wird das Alter auf die ersten beiden Stellen einer vierstelligen Zahl gesetzt, der addierte Geldbetrag kommt auf die beiden letzten Stellen der vierstelligen Zahl. Es entsteht also immer eine vierstellige Zahl, bei der die ersten beiden Ziffern das Alter und die letzten beiden Ziffern den Inhalt des Geldbeutels angeben.
c. Sei z das Gewicht. Es ist ein Term aufzustellen, der verklausuliert $10000x + 100y + z$ ergibt, z. B.

$$\begin{aligned} & (2x + 5) \cdot 5000 + (y - 365) \cdot 100 + z + 11500 \\ = \ & 10000x + 100y + z + 25000 - 36500 + 11500 \\ = \ & 10000x + 100y + z \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Sechseck-Möndchen)

Die Fläche der sechs Möndchen ergibt sich aus der Fläche von sechs Halbkreisen mit dem Radius $\frac{r}{2}$ abzüglich dessen, was übrig bleibt, wenn man von der Fläche des großen Kreises das Sechseck abzieht.

$$\begin{aligned} A_{Mndchen} &= 6 \cdot \pi \frac{r^2}{4} - \left(\pi r^2 - A_{Sechseck}\right) \\ &= \frac{3}{2}\pi r^2 - \pi r^2 + A_{Sechseck} \\ &= A_{Sechseck} + \frac{1}{2}\pi r^2 \,. \end{aligned}$$

Diew Möndchen haben mehr Fläche als das Sechseck und benötigen mehr Farbe.

Aufgabe 3 (Bruch und Kehrwert)

a. Quadrate sind niemals negativ.

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \,, \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \,, \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \,, \ | : (ab) \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 \,. \end{aligned}$$

b. Die letzte Gleichungszeile endet mit „= 2“, wenn die erste mit „= 0“ endet, d. h. wenn a und b gleich sind.

Aufgabe 4 (Logical Schulfächer)

Die Zahlen in der folgenden Tabelle geben eine möglich Reihenfolge für das Ausfüllen an.

	Arnold	Brendel	Clausner
Fach 1	Bio	D	Ph
	(7)	(10)	(6)
Fach 2	M	G	CH
	(8)	(10)	(9)
Alter	jüngster	ältester	mittel
	(1)	(2)	(3)
Heimweg	kurz	lang	kurz
	(5)	(4)	(5)

4.17.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (ANNA-Zahlen)

a. 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (9 Zahlen)
b. 3-stellige ANNA-Zahlen beginnen mit einer der Ziffernfolgen 10 bis 99, das sind 90 Stück. 4-stellige ANNA-Zahlen beginnen ebenfalls mit einer Ziffernfolge 10 bis 99, das sind also ebenfalls 90 Stück.
c. 5-stellige beginnen mit $100, \ldots, 999$ (900 Stück). 6-stellige ebenso. 7- und 8stellige beginnen mit $1000, \ldots, 9999$ (9000 Stück). Sei $A(n)$ die Anzahl der n.stelligen ANNA-Zahlen. Es gilt:

$$A(n) = \begin{cases} 9 \cdot 10^{\frac{n+1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 9 \cdot 10^{\frac{n+2}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

d. Der Wert der ANNA-Zahl $z = abba$ ist

$$\begin{aligned} z &= 1000a + 100b + 10b + a \\ &= 1001a + 110b \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a + 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot b \\ &= 11 \cdot (91a + 10b)\,. \end{aligned}$$

Man sieht, 11 ist Teiler aller 4-stelligen ANNA-Zahlen.
e. Siehe d.

Aufgabe 2 (Schulwettkampf)

a. $2 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 30$ Partien sind auszutragen.
b. Die Anzahl $A(n)$ der Partien errechnet sich als

$$\begin{aligned} A(n) &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= n(n-1)\,. \end{aligned}$$

c. Wenn eine beliebige Mannschaft $2(n-1)-1$ Partien gewinnt und 1 Partie verliert, kann es eine andere Mannschaft geben, die eben so viele Punkte erzielt, nämlich diejenige, die gegen die beliebige Mannschaft einmal gewonnen hat. Wenn eine beliebige Mannschaft $2(n-1)-1$ Partien gewinnt und 1 Partie unentschieden gespielt hat, kann keine andere Mannschaft eben so viele oder mehr Punkte erreichen, weil jede andere Mannschaft mindestens 1 Partie verloren hat. Es reichen also $3(2(n-1)-1)+1 = 3(2n-2-1)+1 = 6n-9+1 = 6n-8$ Punkte zum sicheren Gewinn.

d. Es können jeweils nur 3 Partien gleichzeitig durchgeführt werden. Das gegebenenfalls 7. Team hat Pause. Somit werden bei 6 Teams für $6 \cdot 5 = 30$ Partien $30 : 3 = 10$ Starttermine benötigt und bei 7 Teams für $7 \cdot 6 = 42$ Partien $42 : 3 = 14$ Starttermine. Dass man damit wirklich hinkommt, wäre noch zu zeigen. Ein Plan für die Hinrunde mit 6 Mannschaften A bis F könnte so aussehen:

	A	B	C	D	E	F
A		1	2	3	4	5
B			5	4	2	3
C				1	3	4
D					5	2
E						1
F						

e. Bei n Mannschaften sind $n(n-1)$ Partien zu absolvieren. Es können gleichzeitig $n : 2$ (bei gerader Teilnehmerzahl) bzw. $(n-1) : 2$ (bei ungerader Teilnehmerzahl) Partien angesetzt werden. Die Zahl $T(n)$ der Starttermine ergibt sich damit zu

$$T(n) = \begin{cases} 2(n-1) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2n & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4.17.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Schokoladenbonbons)

„Nicht einmal drei für jede“ soll ja wohl heißen, dass eine oder sogar zwei der Damen drei Bonbons erhalten und auch die übrige(n) nicht ganz leer ausgehen d. h. der Rest der Bonbons ist kleiner als 9, aber nur wenig kleiner, z. B. 8 Stück. In diesem Fall hätte die letzte Tochter 12 Bonbons vorgefunden, die vorhergehende 20 und die erste 24. (Da auch die Zwischenschritte naturgemäß ganzzahlige Ergebnisse verlangen, wäre nur noch eine Lösung mit anfänglich 12 Bonbons und einem Rest von 4 möglich, aber damit wäre die eingangs erwähnte Einschränkung nicht zu realisieren.)

Aufgabe 2 (Ernst und Moritz)

a. Am Ufer 1 stehen e (Ernst) und m (Moritz) sowie die drei Wanderer W_1, W_2 und W_3.

Ufer 1	Boot	Ufer 2
$W_1,\ W_2,\ W_3$	$e,\ m\ \Rightarrow$	
$W_1,\ W_2,\ W_3$	$\Leftarrow\ e$	m
$W_2,\ W_3,\ e$	$W_1\ \Rightarrow$	m
$W_2,\ W_3,\ e$	$\Leftarrow\ m$	W_1
$W_2,\ W_3$	$e,\ m\ \Rightarrow$	W_1
$W_2,\ W_3$	$\Leftarrow\ e$	$W_1,\ m$
$W_3,\ e$	$W_2\ \Rightarrow$	$W_1\ m$
$W_3,\ e$	$\Leftarrow\ m$	$W_1,\ W_2$
W_3	$e, m\ \Rightarrow$	$W_1,\ W_2$
W_3	$\Leftarrow\ e$	$W_1,\ W_2,\ m$
e	$W_3\ \Rightarrow$	$W_1,\ W_2,\ m$
e	$\Leftarrow\ m$	$W_1,\ W_2,\ W_3$
	$e,\ m\ \Rightarrow$	$W_1,\ W_2,\ W_3$

b. Es gibt 21 solche Quadrate, siehe Abbildung 4.27,

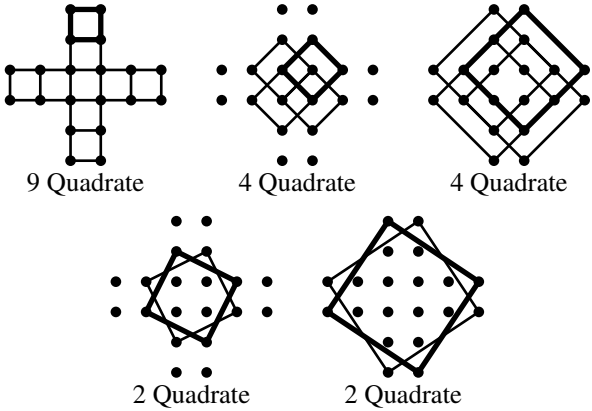


Abbildung 4.27:
Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium 2012, Klassen 5 und 6, Aufg. 2b, Lösung

Aufgabe 3 (Ballkreis)

a. Die Schüler erhalten den Ball in folgender Reihenfolge: 1 – 4 – 7 – 10 – 3 – 6 – 9 – 2 – 5 – 8 – (1). Alle Schüler werden angespielt.
b. Wie man sieht, kommt der Ball nach 3 Runden wieder beim Schüler 1 an.
c. Überspringt man 1, 3, 5 oder 7 Schüler, werden nur Schüler mit ungerader Nummer den Ball erhalten. Überspringt man 4 Schüler, machen 1 und 6 das Spiel unter sich aus, überspringt man 9, spielt 1 mit sich alleine. Wenn man immer 2, 6 oder 8 Schüler überspringt, werden alle in das Spiel einbezogen. Für 2 ist der Beweis in a. erbracht, für 6 hat man ein Spiel, das in entgegengestzter Richtung immer zwei überspringt, und für 8 enthält jeweils der Nachbar in Gegenrichtung den Ball.

Regel: Addiert man 1 zur Zahl der übersprungenen Schüler, muss die enstehende Zahl kleiner als 10 sein und darf die Primfaktoren 2 und 5 nicht enthalten. (Dafür kommen also nur 3, 7 und 9 in Betracht, in Übereinstimmung mit dem zuvor Gesagten.)

4.18 Artland-Gymnasium Quakenbrück 2013

4.18.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Würfelflächen)

Betrachten wir gleich den allgemeinen Fall. Jeder Würfel hat 8 Ecken, demzufolge auch 8 kleine Eckwürfel mit je 3 hellgrauen Außenflächen.

Jeder Würfel hat 12 Kanten. Jede Kante besteht aus n kleinen Würfeln. Abzüglich der zwei Eckwürfel bleiben auf jeder Kante $n-2$, insgesamt also $12n - 24$ kleine Würfel mit je zwei hellgrauen Außenflächen übrig. Für $n = 3$ sind das 12, für $n = 4$ sind das 24 solche kleinen Würfel.

Jeder Würfel hat 6 Flächen mit jeweils n^2 kleinen Würfeln. Die begrenzenden Würfeln sind schon bei den Ecken und Kanten berücksichtigt. Damit bleiben je Fläche des großen Würfels $(n-2)^2$, insgesamt also $6(n-2)^2$ kleine Würfel mit je 1 hellgrauen Seite.

Die übrigen $(n-2)^3$ kleinen Würfel haben überhaupt keine hellgrauen Flächen. Für $n = 3$ ist das 1, für $n = 4$ sind das 8 kleine Würfel.

Zur Kontrolle kann man all die kleinen Würfel addieren und erhält wie zu erwarten $(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + (12n-24) + 8 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + 6n^2 - 24n + 12n - 24 + 8 = n^3$.

Aufgabe 2 (Überlegungen zur Uhr)

a. In den nächsten 24 Stunden führt der große Zeiger 24, der kleine 2 vollständige Umdrehungen aus. Der große Zeiger überholt den kleinen also 22-mal, und bei jedem Überholen kommen die Zeiger kurz zur Deckung.
b. Der große Zeiger dreht sich mit einer Geschwindigkeit von 360° pro 3600 Sekunden, der kleine mit einer Geschwindigkeit von 360° pro 43200 Sekunden (= 12 Stunden). Allerdings hat der kleine Zeiger einen Vorsprung von 60°, weil er schon auf der „2“ beginnt.

$$\begin{aligned}
\frac{360}{3600} \cdot x &= \frac{360}{43200} \cdot x + 60 \,. \\
\frac{x}{10} &= \frac{x}{120} + 60 \,, \\
\frac{11x}{120} &= 60 \,, \\
x &= 654,\overline{54} \,.
\end{aligned}$$

Die Zeiger kommen nach ca. 655 Sekunden oder 10 Minuten und 55 Sekunden zur Deckung.

c. Die Uhr muss so aufgestellt werden können, dass irgendwann im Laufe von 12 Stunden einmal beide Zeiger gleichzeitig senkrecht nach oben zeigen.
Da nun innerhalb von 12 Stunden der Minuten- und der Stundenzeiger 11-mal zur Deckung kommen (vgl. 2a), muss die Uhr 11-eckig sein. Nur dann kann man jede dieser Zeigerstellungen nach oben zeigen lassen.

Aufgabe 3 (Logik)

a. Betrachten wir eine Tackete. Diese ist einerseits ein Saabel, andererseits keine Maluma. Satz 1 ist richtig.
b. Betrachten wir einen Kniesel, der nicht hompfen kann. Dieser ist dann kein Druppel. Satz 3 ist richtig.
c. Lybse und Murkel könnten identisch sein, das widerspräche aber den Sätzen 2 und 3. Lybse und Murkel könnten elementfremd sein, aber das widerspräche Satz 1. Also ist Satz 4 richtig.

4.18.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Eine Dreiecksfläche)

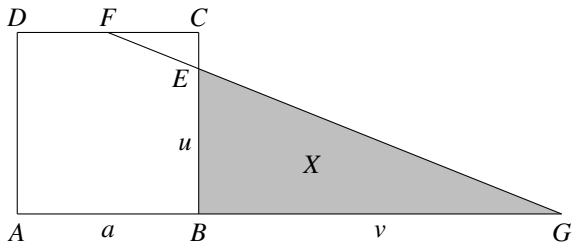


Abbildung 4.28:
Artland-Gymnasium 2013, Klasse 7 – 10, Mündl. Teil, Aufg. 1

Seite $\overline{BC}$ denken wir uns in $n + 1$ Teile geteilt, von denen n auf den Abschnitt u entfallen und eines auf den Rest. Dann ist

$$u = \frac{n}{n+1} a$$

und, wie man Hilfe eines Strahlensatzes erkennt,

$$v = n \cdot \frac{a}{2} \ .$$

Daraus folgt für die getönte Fläche X

$$X = \frac{1}{2} \cdot v \cdot u = \frac{1}{2} \cdot \frac{na}{2} \cdot \frac{na}{n+1} = \frac{n^2}{4(n+1)} a^2 \ .$$

Für $a = 8$ cm und $n = 4$ (Aufg. a) ergibt das

$$X = 51,2 \text{ cm}^2 \ .$$

Aufgabe 2 (Erstaunliches mit Primzahlen)

Sei p eine Primzahl größer 3. $p^2 - 1$ lässt sich darstellen als $(p-1) \cdot (p+1)$. Die beiden Faktoren $p-1$ und $p+1$ sind gerade, und von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine sogar durch 4 teilbar. Das Produkt enthält also die 8. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1$, p und $p+1$ ist eine durch 3 teilbar. p als Primzahl kann das nicht sein, also eine von den andern beiden. Deren Produkt enthält mithin auch den Faktor 3. Zusammen mit der genannten 8 steckt also 24 in dem Produkt.

4.18.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Die drei Araber)

Die drei teilen sich 8 Brote, jeder verzehrt $8/3$ Brote. Für jedes Drittel zahlt der Letztgekommene 1 Piaster, 7 Piaster an den ersten und 1 Piaster an den zweiten, der ja von seinen drei Broten nur $1/3$ Brot abgegeben hat.

Aufgabe 2 (Pilze)

a. Das Säubern der Pilze erfordert eine Arbeitszeit von $8 \cdot 4\frac{1}{2} = 36$ Minuten. Nach zwei Minuten sind davon $8 \cdot 2 = 16$ Minuten erledigt. Bleibt noch Arbeit für 20 Minuten, d. h. jede der beiden Frauen hat noch weitere 10 Minuten, insgesamt also 12 Minuten zu tun.
b. 10 kg frisch gesäuberte Pilze enthalten 9900 g Wasser und 100 g festes Material. Wenn diese 100 g nach einiger Zeit 2 Prozent der Gesamtmasse ausmachen. muss diese 5 kg betragen.

Aufgabe 3 (Mördersuche)

Stellen wir in einer Tabelle dar, wessen Vermutung zutrifft, wenn der in der ersten Spalte Genannte der Mörder ist.

	Florian	Timo	Lisa	Susi
Butler	+	–	+	–
Gärtner	–	+	+	–
Koch	–	–	–	+

Da nur eine(r) Recht behalten soll, kommt nur die letzte Tabellenzeile in Frage: Der Koch war der Mörder, und Susi hatte Recht.

4.19 Gymnasium „In der Wüste“ Osnabrück 2014

4.19.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Hin und Her im Koordinatensystem)

a. Die geraden Quadratzahlen haben die Koordinaten $(n/1)$, die ungeraden $(1/n)$. Also hat die Zahl 36 die Koordinaten (6/1). Die Zahl 49 hat die Koordinaten (1/7). Auf (6/1) steht wie gesagt die Zahl 36. Bis (6/4) muss man 3 Schritte noch oben laufen. Man ist dann bei der Zahl 39.
b. Die geraden Quadratzahlen haben die Koordinaten $(n/1)$, die ungeraden $(1/n)$. Wegen $44^2 = 1936 < 2014 < 2025 = 45^2$ liegt 2014 auf dem Streckenzug von (44/1) bis (1/45) und zwar 11 Stellen rechts von 2025, d.h. 2014 hat die Koordinaten (12/45).
c. Geht man von (n/n) zurück bis zur vorangehenden Quadratzahl $(n-1)^2$, benötigt man dazu n Schritte. Auf (n/n) steht also die Zahl $(n-1)^2 + n = \underline{\underline{n^2 - n + 1}}$.

Aufgabe 2 (Sparweltmeister)

a. Mit jedem Tag verringert sich der Orangensaft auf drei Viertel des letzten Wertes. Wann ist sein Anteil auf unter 5%gesunken? Gesucht ist das kleinste n, welches die Ungleichung $0.75^n < 0,05$ erfüllt. Es gilt $0.75^{10} \approx 0,056$ und $0,75^{11} \approx 0,042$, somit wird der Anteil von 5% durch das Nachfüllen am 11. Tag unterschritten. Die dann noch volle Flasche wird in den nächsten 4 Tagen geleert und ist am 15. Tag leer.
b. Da „8“, „9“ und „0“ nicht benutzt wurden, hat kein Familienmitglied in den drei Jahren einen „runden“ Geburtstag gehabt, somit müssen beide Eltern im Bereich 30+ und Kevin im Bereich 10+ liegen. Nach Abzug der dadurch verbrauchen Kerzenabschnitte bleiben: 1mal „3“, 2 mal „4“, 3 mal „5“, 2 mal „6“ und 1 mal „7“.

Da die Endziffern drei aufeinander folgende Zahlen sein müssen, sind also noch die Einerstellen 3/4/5, 4/5/6 und 5/6/7 den Familienmitgliedern zuzuordnen. Die „33“ hätte mit dem vorhandenen Kerzenset nicht dargestellt werden können, sie fällt für die Eltern daher weg. Daher muss Kevin die Geburtstage 13/14/15 gehabt haben und wird als nächstes die „1“ und die „6“ auspusten.

Aufgabe 3 (Verbinden und Teilen)

a. Siehe Abb. 4.29.
b. Siehe Abb. 4.30.
c. Siehe Abb. 4.31.

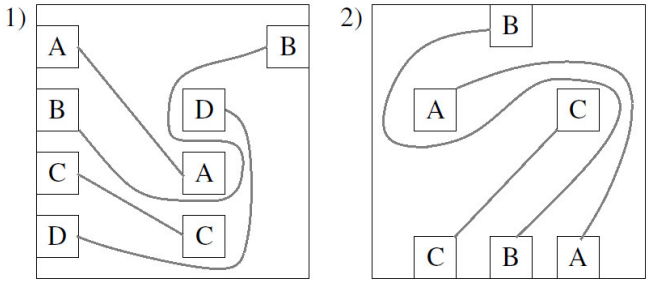


Abbildung 4.29:
„Gymnasium in der Wüste“ 2014, Klassenstufen 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3a. Lösung

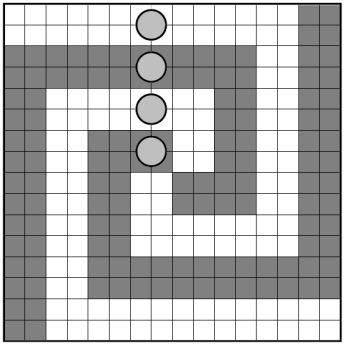


Abbildung 4.30:
„Gymnasium in der Wüste“ 2014, Klassenstufen 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3b, Lösung

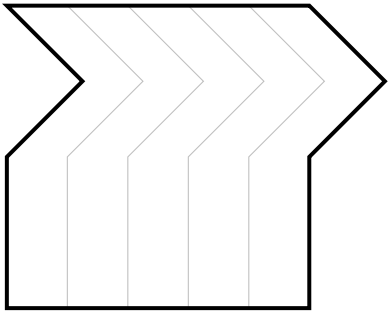


Abbildung 4.31:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3c, Lösung

Aufgabe 4 (Spaß mit Trapezen)

a. Die beiden Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle CDE$ sind ähnlich zueinander. Das Seitenverhältnis ist 2 : 1, wie man anhand des 3. Strahlensatzes feststellt. Dann verhalten sich die Flächen wie 4 : 1.
b. (s. Seite 149, Aufg. 1)

4.19.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (In den Fußstapfen von Gauß)

a. Man bildet Pärchen wie im Beispiel von Gauß, dabei bleibt die mittlere Zahl 51 ohne Partner.

$$\begin{aligned} & 5 + 6 + 7 + \ldots + 96 + 97 \\ = \; & (5 + 97) + (6 + 96) + \ldots + (50 + 52) + 51 \\ = \; & 102 \cdot 46 + 51 = \underline{\underline{4743}} \,. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & 5 + 7 + 9 + \ldots + 95 + 97 \\ = \; & (5 + 97) + (7 + 95) + \ldots + (49 + 53) + 51 \\ = \; & 102 \cdot 23 + 51 = \underline{\underline{2397}} \,. \end{aligned}$$

c. Die Anzahl der einstelligen ungeraden Zahlen ist 5. Somit ist die Anzahl der zweistelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind, $5 \cdot 5 = 25$. Es ergeben sich 12 Pärchen plus die mittlere Zahl 55.

$$\begin{aligned} & 11 + 13 + 15 + \ldots + 97 + 99 \\ = \; & (11 + 99) + (13 + 97) + \ldots + (53 + 57) + 55 \\ = \; & 110 \cdot 12 + 55 = \underline{\underline{1375}} \,. \end{aligned}$$

d. Die Anzahl der vierstelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind, beträgt $5^4 = 625$. Es ergeben sich 312 Pärchen plus die

mittlere Zahl 5555.

$$\begin{aligned} & 1111 + 1113 + 1115 + \ldots + 9997 + 9999 \\ = \; & (1111 + 9999) + (1113 + 9997) + \ldots \\ & +(5553 + 5557) + 5555 \\ = \; & 11110 \cdot 312 + 5555 = \underline{\underline{3\,471\,875}} \,. \end{aligned}$$

e. Die Anzahl der n-stelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind, beträgt 5^n. Die Summe aus der kleinsten und größten n-stelligen Zahl, deren Ziffern alle ungerade sind, lässt sich aus folgender Entwicklung erkennen:

- 2-stellig: $11 + 99 = 110 = 10 \cdot 11$,
- 3-stellig: $111 + 999 = 11110 = 10 \cdot 111$,
- 4-stellig: $1111 + 9999 = 111110 = 10 \cdot 1111$,

  $\vdots$
- n-stellig: $10 \cdot 11\ldots1$,
  wobei der zweite Faktor aus n Einsen besteht.

Somit gilt für deren Summe S:

$$\begin{aligned} S &= \frac{5^n \cdot 10 \cdot 11\ldots1}{2} \\ &= \underline{\underline{5^{n+1} \cdot 11\ldots1}} \,, \end{aligned}$$

wobei der zweite Faktor aus n Einsen besteht.

(Anmerkung: Wegen $11\ldots1 = \frac{99\ldots9}{9} = \frac{10^n - 1}{9}$ kann man das Ergebnis auch schreiben als $S = \frac{5^{n+1} \cdot (10^n - 1)}{9}$.)

Aufgabe 2 (Aller guten Dinge sind drei)

a. Wenn alle drei Variablen den gleichen Wert haben, kann man das Gleichungssystem auf eine Gleichung reduzieren:

$$\begin{aligned} x + x + \frac{1}{x} &= 3\,, \\ x^2 + x^2 + 1 &= 3x\,, \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 0\,, \\ x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} &= 0\,, \\ x = 1 \quad &\vee \quad x = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

In diesem Fall hat das Gleichungssystem also nur die beiden Lösungen $(1; 1; 1)$ und $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

b. Angenommen das Gleichungssystem hat die Lösung $(a; a; b)$ mit $a \neq b$. Dann sind auf Grund der „Symmetrie“ in dem Gleichungssystem auch $(a; b; a)$ und $(b; a; a)$ Lösungen. Es gibt dann also 3 Lösungen, bei denen genau zwei Variablen den gleichen Wert haben. Gibt es noch eine weitere Lösung $(c; c; d)$, so sind auch $(c; d; c)$ und und $(d; c; c)$ Lösungen des Gleichungssystems. Die Anzahl der Lösungen, bei denen genau zwei Variablen den gleichen Wert haben, ist also durch drei teilbar.
Es gibt tatsächlich solche Lösungen: $(3; 3; -\frac{1}{3})$, $(3; -\frac{1}{3}\ ; 3)$, $(-\frac{1}{3}; 3, 3)$.

c. Multipliziert man die Gleichungen mit dem jeweiligen Hauptnenner, so erhält man

$$\begin{aligned} xz + yz + 1 &= 3z\,, \\ xy + xz + 1 &= 3x\,, \\ yz + xy + 1 &= 3y\,. \end{aligned}$$

Subtrahiert man Gleichung 2 von Gleichung 1, so folgt:

$$\begin{aligned} yz - xy &= 3z - 3x\,, \\ y(z-x) &= 3(z-x)\,, \\ (z-x)(y-3) &= 0\,, \\ z = x &\vee y = 3\,. \end{aligned}$$

Analog erschließt man $x = y \vee z = 3$ sowie $z = y \vee x = 3$. Da die drei Variablen verschiedene Werte haben sollen, können sie nicht alle den Wert 3 bekommen. Hätte etwa x nicht den Wert 3, gälte $z = y$, d.h. y und z hätten denselben Wert. In den anderen Fällen schließt man entsprechend. Fazit: Es kann keine Lösung des Gleichungssystems mit paarweise verschiedenen Einzelwerten geben.

4.19.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1(Bunte Würfel)

a. Es gibt sechs Farben: Rot, Gelb, Grün, Blau, Grau und Schwarz. Die einzige, die nicht an Blau grenzt, ist Schwarz; die einzige, die nicht an Rot grenzt, ist Grün. Paarweise einander gegenüber liegen also Blau und Schwarz, Rot und Grün, Grau und Gelb. Daraus ersieht man, dass – in dieser Reihemfolge – die Farben Grau, Schwarz, Rot, Grün unten liegen.
b. Die vierte Abbildung des Würfels zeigt, dass beim Blick auf die blaue Fläche die rote und die graue Fläche im Uhrzeigersinn aufeinander folgen. Das führt zu den Natzdarstellungen in Abb. 4.32.
c. Betrachten wir die vierte Netzdarstellung in Aufgabenteil b.! Liegt die blaue Fläche unten und die gelbe hinten, so schauen wir vorn auf die graue Seite, und die rote Seite befindet sich links und nicht, wie unter Ziffer 5 gefordert, rechts, d.h. der Würfel kann nicht wie verlangt positioniert werden.
d. Fügen wir an eine bestehende Treppe unten eine n-te Stufe an, so kommen n Würfel und $2n + 3$ sichtbare Flächen hinzu.

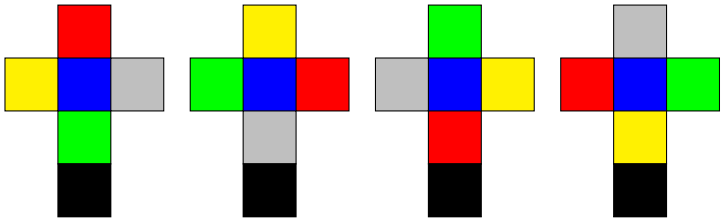


Abbildung 4.32:
Gymnasium „In der Wüste“ 2014, Klasse 5 und 6, Aufg. 1b, Lösung

Stufen	Würfel letzte St.	Würfel gesamt	Flächen letzte St.	Flächen gesamt
1	1	1	5	5
2	2	3	7	12
3	3	6	9	21
4	4	10	11	32
5	5	15	13	45
6	6	21	15	60
7	7	28	17	77
8	8	36	19	96
9	9	45	21	117

Man sieht, mit der 9. Stufe sind 117 sichtbare Flächen erreicht.

Aufgabe 2 (Zahlenschloss)

a. An jeder Stelle sind 4 verschiedene Zahlen möglich. Folglich gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$ verschiedene Möglichkeiten. Schlimmstenfalls muss Jan also 256 Einstellungen ausprobieren, bis sein Schloss aufgeht.
b. Bei jedem Versuch wir das letzte Rädchen um 1 weiter gedreht. Nach 4 Versuchen, wenn das letzte Rädchen wieder auf „0“ steht, wird das vorletzte Rädchen um 1 weiter gedreht. das drittletzte

Rädchen entsprechend bei jedem 16. Versuch, das viertletzte, also erste, Rädchen bei jedem 64. Versuch. Jan beginnt mit „0000“. Er erreicht die Kombination „0312“ nach $0 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 2 = 48 + 4 + 2 = 54$ weiteren Versuchen, die „0000“ hinzu genommen ist das sein 55. Versuch..

c. Nach 5 Minuten bzw. 300 Sekunden hat Jan 150 Einstellungen durchprobiert. Die erste Einstellung war „0000“, danach hat er 149-mal die Einstellung weitergedreht. Da $149 = 2 \cdot 64 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1$, geht das Schloss bei der Kombination „2111“ auf.

Aufgabe 3 (Umzugsproblem)

1	Bett	7	Tisch	13	Schrank
2	Klavier	8	Schrank	14	Bett
3	Schrank	9	Klavier	15	Tisch
4	Tisch	10	Tisch	16	Klavier
5	Couch	11	Bett	17	Bett
6	Bett	12	Couch		

4.20 Gymnasium Carolinum Osnabrück 2015

4.20.1 Klassenstufen 7 bis 10, Schriftlicher Teil

Aufgabe 1 (Vier Vieren)

Hier gibt es viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten, z. B. diese:

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{4}{4} + \frac{4}{4}\,, \\
3 &= \frac{4+4+4}{4}\,, \\
4 &= 4 + \frac{4-4}{4}\,, \\
5 &= 4 + \left(\frac{4}{4}\right)^4\,, \\
6 &= 4 + \frac{4+4}{4}\,, \\
7 &= 4 + 4 - \frac{4}{4}\,, \\
8 &= 4 + 4 + 4 - 4\,, \\
9 &= 4 + 4 + \frac{4}{4}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Rechenergebnisse mit zwei Zahlen)

a. Sei y die kleinere Zahl. Aus

$$\begin{aligned}
(6+y) + (6-y) + 6 \cdot y + \frac{6}{y} &= 32\,, \\
6 \cdot y + \frac{6}{y} &= 20
\end{aligned}$$

folgt $y = 3$, da y eine natürliche Zahl sein soll.

b. Die größere Zahl muss ein Vielfaches der kleineren Zahl y sein.

c. Sei x die größere, y die kleinere Zahl. Wegen b. ist $x = k \cdot y$ mit natürlichem k. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(ky + y) + (ky - y) + ky^2 + k &= 3125\,, \\
2ky + ky^2 + k &= 5^5\,, \\
k(y^2 + 2y + 1) &= 5^5\,, \\
k(y+1)^2 &= 5^5 \\
k = 5,\ (y+1) = 5^2 \quad &\vee \quad k = 5^3,\ (y+1) = 5\,.
\end{aligned}$$

Im ersten Fall ist $y = 24,\ k = 5,\ x = 5 \cdot 24 = 120$; im zweiten Fall ist $y = 4,\ k = 125,\ x = 4 \cdot 125 = 500$.

Aufgabe 3 (Doppelspirale)

a. $7 + 2 \cdot (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 7 + 2 \cdot 21 = 49$.

b. (s. Abb. 4.33)

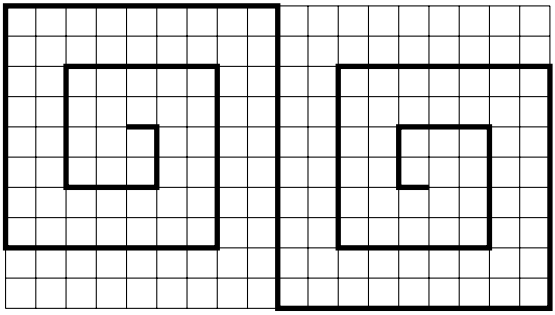


Abbildung 4.33:
Gymnasium Carolinum 2015, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 3)c, Lösung

c. Das kürzeste Streckenstück zeigt bei D_1 nach oben, bei D_2 nach links, bei D_3 nach unten, bei D_4 nach rechts, danach wiederholt sich diese Reihenfolge immer wieder. Ist n Vielfaches von 4, zeigt das kürzeste Streckenstück nach rechts, so auch bei D_{2012}. Also weist es bei D_{2015} wie bei D_3 nach unten.

d. Die Gesamtlänge s des Streckenzugs D_n errechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= n + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) \\ &= n + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \\ &= n + (n-1)n \\ &= \underline{\underline{n^2}}\,. \end{aligned}$$

e. Man addiert den linken und den rechten Teil des Streckenzugs, indem man deren Längen „versetzt“ untereinander schreibt und die nur einmal vorkommende Ausgangslänge n dem linken Streckenzug zuschlägt.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \ldots & + & n \\ & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-1 \\ \hline 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & \ldots & + & 2n-1 \end{array}$$

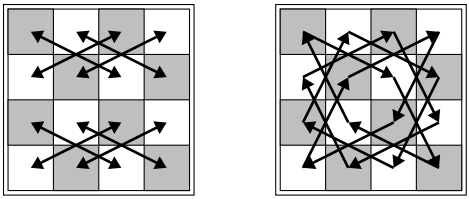
Die letzte Zeile weist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen auf, was nach Voraussetzung gerade n^2 ergibt.

Aufgabe 4 (Springerproblem)

a. (s. Abb. 4.34)

b. Es gibt keine Lösung: Da das Schachbrett 25 Felder hat, kann die Anzahl der weißen und dunklen Felder nicht gleich sein. Der Springer wechselt bei seinem Zug aber zwangsläufig die Farbe des Feldes. Gibt es z. B. mehr dunkle Felder, können die dort startenden Springer nicht alle auf einem weißen Feld landen.

c. Wie man leicht nachprüft, gibt es für $n = 1, 2, 3$ keine Lösung. Für alle ungeraden n gilt das Argument aus Aufg. 4)b, d. h. es gibt für diese keine Lösung.

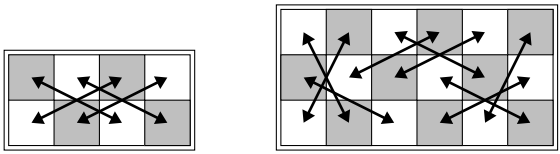


Paartausch zwischen je 2 Feldern

Ringtausch zwischen je 4 Feldern

Abbildung 4.34:
Gymnasium Carolinum 2015, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4, Lösung

Bei den geraden n sind die Vielfachen von 4 von den übrigen zu unterscheiden. Bei den Vielfachen von 4 lässt sich das gesamte Feld in lauter 4×4-Teilfelder aufteilen, die jedes für sich wie in Aufgabe 4)a behandelt werden können.
Für die übrigen betrachten wir zunächst hilfsweise eine 4×2-Feld und ein 6×3-Feld (s. Abb. 4.35). Ein 6×6-Feld lässt sich aus zwei 6×3-Feldern zusammensetzen (das zweite ist ggf. um 180° zu drehen). Hierfür gibt es also eine Lösung.



4×2-Feld

6×3-Feld

Abbildung 4.35:
Gymnasium Carolinum 2015, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4)c, Lösung

Gehen wir jetzt über zu einem 10×10-Feld. Dieses lässt sich aus einem 6×6-Feld und einer L-förmigen Ergänzung bilden (s. Abb. 4.36). Letzuteres kann man wie dargestellt in Teilflächen zerlegen, für deren jede eine Lösung wie bereits dargelegt möglich ist. Bei der weiteren Vergrößerung von n in Schritten von 4 verfährt man entsprechend. Fazit: Das Springerproblem kann für alle geraden $n \geq 4$ gelöst werden.

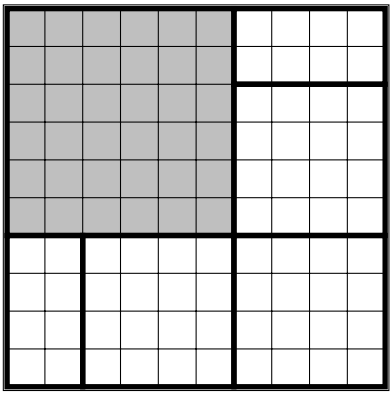


Abbildung 4.36:
Gymnasium Carolinum 2015, Klasse 7 – 10, Schriftl. Teil, Aufg. 4)c, Lösung

4.20.2 Klassenstufen 7 bis 10, Mündlicher Teil

Aufgabe 1 (Fußballturnier II)

a. Die Chillies haben 4 Punkte aus 2 Spielen, d. h. einen Sieg und ein Unentschieden. Die Abräumer haben 4 Punkte aus 3 Spielen. Drei Unentschieden genügen nicht, also muss es sich um einen Sieg, ein Unentschieden und eine Niederlage handeln. Die Bolzer

haben 1 Punkt aus 2 Spielen, also eine Niederlage und ein Unentschieden. Die Drachen haben 3 Punkte aus 3 Spielen. Es könnte sich um einen Sieg und zwei Niederlagen oder aber um drei Unentschieden handeln. Da sich bei den bisherigen Mannschaften die Anzahlen der Siege und Niederlagen bereits ausgleichen, können nicht ein Sieg und zwei Niederlagen dazukommen. Es gäbe dann eine Niederlage ohne einen zugehörigen Sieg. Also waren es hier drei Unentschieden.

	Si.	Un.	Ni.	Spiele	Punkte	Tore
Chillies	1	1	0	2	4	5 : 2
Abräumer	1	1	1	3	4	1 : 3
Drachen	0	3	3	3	3	2 : 2
Bolzer	0	1	1	2	1	0 : 1

b. Da nur noch ein Tor fällt, können die Bolzer nicht mehr verlieren. Sie bekommen also 3 Punkte für das Spiel und haben insgesamt 4Punkte wie die Chilies und die Abräumer. Die Abräumer haben eine Tordifferenz von –2.
Fall 1: Die Bolzer gewinnen 4:1. Dann haben sie eine Tordifferenz von +2 (bei 4:2 Toren). Gleichzeitig haben die Chillies als Gegner eine Tordifferenz von 0 (bei 6:6 Toren). Dann liegen die Bolzer auf Platz 1, die Chillies auf Platz 2, die Abräumer auf Platz 3, die Drachen auf Platz 4.
Fall 2: Die Bolzer gewinnen 3:2. Dann haben sie eine Tordifferenz von 0 (bei 3:3 Toren). Gleichzeitig haben die Chillies als Gegner eine Tordifferenz von +2 (bei 7:5 Toren). Dann liegen die Chillies auf Platz 1, die Bolzer auf Platz 2, der Rest bleibt wie zuvor.
Die Bolzer werden also Erster oder Zweiter.

c. Folgende Ergebnisse sind je Mannschaft möglich (aufbauend auf Aufgabenteil a):

Chillies	5 : 2 und 0 : 0
	oder 4 : 1 und 1 : 1
	oder 3 : 0 und 2 : 2
Abräumer	1 : 0 und 0 : 0 und 0 : 3
	(1 : 1 nicht möglich, da kein weiteres eigenes Tor)
Drachen	2 : 2 und 0 : 0 und 0 : 0
	oder 1 : 1 und 1 : 1 und 0 : 0
Bolzer	0 : 0 und 0 : 1

Da es bei den Abräumern ein 0:3 gab, kann es bei den Chillies nur die dritte Variante sein, da hier das einzige Auftreten eines 3:0 ist. Damit muss es ein 2:2 gegeben haben, also ist es bei den Drachen die erste Variante. D.h.:

Chillies	3 : 0 und 2 : 2
Abräumer	1 : 0 und 0 : 0 und 0 : 3
Drachen	2 : 2 und 0 : 0 und 0 : 0
Bolzer	0 : 0 und 0 : 1

Es ergeben sich folgende Paarungen und Ergebnisse:

Chillies – Abräumer	3 : 0
Chillies – Drachen	2 : 2
Abräumer – Drachen	0 : 0
Abräumer – Bolzer	1 : 0
Drachen – Bolzer	0 : 0

Aufgabe 2 (Dreieck aus Dreieck II)

Die Lösung ist dargelegt auf Seite 194 in der Bearbeitung von Aufgabe 3.

4.20.3 Klassenstufen 5 und 6

Aufgabe 1 (Logical Schülerband)

In der nachfolgenden Tabelle deuten die Zahlen unter den Eintragungen an, in welcher Reihenfolge man diese dem Aufgabentext entnehmen kann.

	Paul	Stephan	Nils	Timo	Guido
Instr.	Gesang	Keyboard	Schlagzeug	Saxophon	Gitarre
	(1)	(2)	(3)	(5)	(4)
Platz	4.	1.	3.	2.	5
	(10)	(9)	(8)	(6)	(7)

Aufgabe 2 (Vier Vieren II)

Die Lösung ist dargelegt auf Seite 224 in der Bearbeitung von Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (Dosen bemalen)

a. Da Annabella die beiden Farben immer abwechselnd benutzen muss, kann sie zwei unterschiedliche Dosen gestalten: Sie beginnt am Boden mit Rot oder mit Blau.
b. Es stehen jetzt drei Farben zur Verfügung, d. h. für den Boden hat sie 3 Möglichkeiten, für den untersten Streifen 2 Möglichkeiten (2 andere Farben), für den mittleren wieder 2 Möglichkeiten und für den obersten wieder 2, insgesamt also $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten. (Hierin sind die Dosen aus Aufgabenteil a bereits enthalten!)
c. Bei allen Dosen sollen alle vier Farben verwendet werden, keine kommt mehrfach vor. Für den Boden gibt es dann 4 Möglichkeiten, für den untersten Ring 3, für den mittleren Ring 2 und für den obersten noch 1, also ergeben sich insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ vierfarbige Varianten , die zu den Varianten aus Aufgabenteil b hinzukommen.

d. Annabella hat also 24 + 24 = 48 verschiedene Dosenvarianten. Die Dosenpyramide beginnt in der obersten Schicht mit 1 Dose, in der zweiten Schicht stehen 1 + 2 = 3 Dosen, in der dritten Schicht stehen 1 + 2 + 3 = 6 Dosen usw. Für die 6 Schichten braucht sie also 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 Dosen. Ihre 48 Dosen reichen für die Pyramide noch nicht aus.

e. Es gibt eine innere Pyramide, die nicht sichtbar ist. Die Anzahl dieser Dosen ist vom obigen Ergebnis zu subtrahieren. Da man die zwei obersten Schichten vollständig sieht, muss es sich innen um eine 4-stufige Pyramide handeln. Gemäß den Überlegungen zu Aufgabenteil d besteht diese aus 1 + 3 + 6 + 10 = 20 Dosen. Sichtbar sind also 56 − 20 = 36 Dosen.

Index

ABCD, 85, 184
Abstandssumme, 54, 160
Achteckzerlegungen, 92, 191
Admin-Passwoerter, 97, 195
Aller guten Dinge, 120, 220
Alter, 62, 169
Altersraetsel, 90, 190
ANNA-Zahlen, 106, 205
Ansichtssache, 94, 193
Aprilwetter, 76, 178
Aufteilungsprobleme, 65, 172

Ballkreis, 108, 208
Bastelbogen, 62, 170
Beinezahl, 104, 201
Blindenschrift, 102, 200
Bruch und Kehrwert, 105, 204
Bruchvergleich, 39, 146
Bunte Würfel, 121, 221
Buntstifte, 55, 162

Comic-Hefte, 58, 166

defekter Fahrstuhl, 80, 180
Doppelspirale, 126, 225
Dorfschullehrer, 48, 158
Dosen bemalen, 131, 231
Drei Araber, 113, 213
Drei Gegenstaende, 34, 138
Drei Geraden, 65, 173
Drei Goetter, 99, 197
Drei Toechter, 101, 199
Dreieck aus Dreieck, 94, 194
Dreieck aus Dreieck II, 128, 230
Dreieck im Quadrat, 88, 186
Dreiecksfläche, 112, 212
Dreieckskonstruktion, 102, 200

Eheprobleme, 35, 139
Eingeschobene Null, 37, 141
Eisenbahnbruecke, 82, 182
Eisenbahnnetz, 49, 158
Elf Freunde, 73, 177
Endziffer Null, 34, 138
Endziffern, 30, 134
Entfernungen, 43, 151
Erdbeeren, 48, 158
Ernst und Moritz, 108, 207

Familienverhaeltnisse, 31, 135
Felder besetzen, 50, 159
Fuenf Kreise, 31, 53, 135, 160
Fuenfersumme, 35, 139
Fuenfstellige Zahl raten, 45, 154
Fussball, 90, 188
Fussballturnier, 31, 135
Fussballturnier II, 128, 228
Fussstapfen von Gauß, 119, 218

Gartenbeete, 90, 188
Gauss-Verschluesselung, 55, 163
GBI-Wuerfel, 70, 176
Geheimziffern, 63, 170
Grausame Tierwelt, 83, 182
Grosser Wuerfel, 46, 155

Hausfigur, 59, 167
Hellseher, 105, 203
Heuvorrat, 80, 181
Hin und Her, 115, 215
Holzleiter, 104, 201
Holzquadrate, 101, 199
Holzwuerfel, einfarbig, 76, 178
Holzwuerfel, mehrfarbig, 87, 186

Kaninchen, 58, 167
Knobolde, 77, 178
Konzentrische Kreise, 33, 136
Kormoraninsel, 56, 164
Kostuemfest, 53, 160

Logelei, 67, 175
Logical Lehrer, 52, 160
Logical OMO, 32, 136
Logical Schülerband, 130, 231
Logical Schulfaecher, 106, 204
Logical Zeitreise, 59, 169
Logik, 112, 211

Magische Kreise, 68, 171
Magische Kreise I, 64
Magische Kreise II, 175
Magisches Dreieck, 42, 149
Moerdersuche, 114, 213
Muenzwurf, 36, 141
Muetze, 47, 156

Natuerliche Zahlen gesucht, 94, 193

Offene Karten, 43, 150
Oster-Kaninchen, 100, 197

Page des Koenigs, 29, 134
Partyspass, 75, 177
Pentagramm, 45, 153
Pilze, 113, 213
Primzahlen, 39, 113, 146, 213
Primzahlzwillinge, 42, 149
Punkt in Winkel, 30, 134
Punktmenge, 35, 140
Pythagorasfigur, 32, 136

Quadrat, 39, 145

Querprodukt, 58, 166

Rechenergebnisse mit zwei Zahlen, 125, 224
Rechengenie, 66, 173

Schnittpunkte, 84, 184
Schokoladenbonbons, 107, 207
Schulausflug, 46, 154
Schulwettkampf, 107, 205
Schustermesser, 55, 162
Sechseck-Moendchen, 105, 203
Sechsecke, 97, 196
Sechsstellige Zahl, 33, 136
Sechsstellige Zahlen, 88, 186
Seitenhalbierende, 35, 139
Seitenzahlen, 104, 201
Showdown, 71, 177
Spaß mit Trapezen, 118, 218
Sparweltmeister], 116, 215
Speisenfolge, 66, 173
Spiegelsumme, 84, 183
Springerproblem, 127, 226
Sternchen, 52, 160
Summe vierstelliger Zahlen, 51, 159

Tablettenfilm, 82, 182
Tangentendreieck, 64, 172
Teilbar durch 5?, 102, 199
Tetraeder, 61, 169
Tischtennisturnier, 53, 160
Toilettenpapierrolle, 46, 155
Trapez, 42, 149
Tube, 56, 165

Ueberlegungen zur Uhr, 110, 210
Umzugsproblem, 123, 223
Ungleichung, 56, 164

Verbinden und Teilen, 116, 216
Versenkt, 95, 194
Vier Vieren, 125, 224
Vier Vieren II, 131, 231
Vierecksflaeche, 49, 158

Was fuer Zahlen?, 103, 201
Weg im Dreieck, 40, 147
Wegnehmspiel, 40, 147
Wer zuletzt kommt . . . , 43, 152
Wettkampfeinlauf, 96, 195
Wiegeproblem, 71, 176
Wiegeproblem II, 78, 179
Wuerfel, 38, 143
Wuerfel mit Dreieck, 80, 180
Wuerfelflächen, 110, 210

Zahlenraetsel, 91, 190
Zahlenschloss, 122, 222
Zerbrochene Fensterscheibe, 89, 188